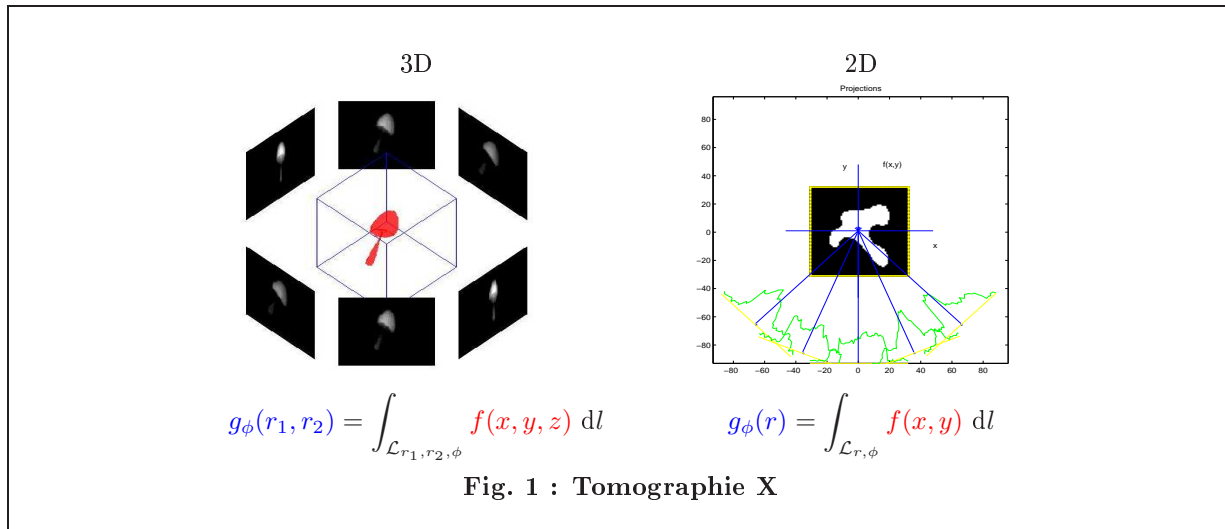
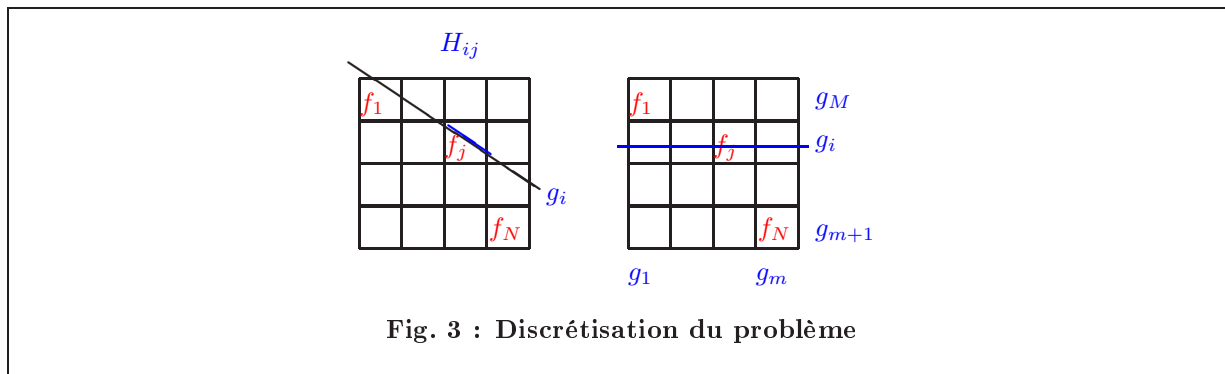
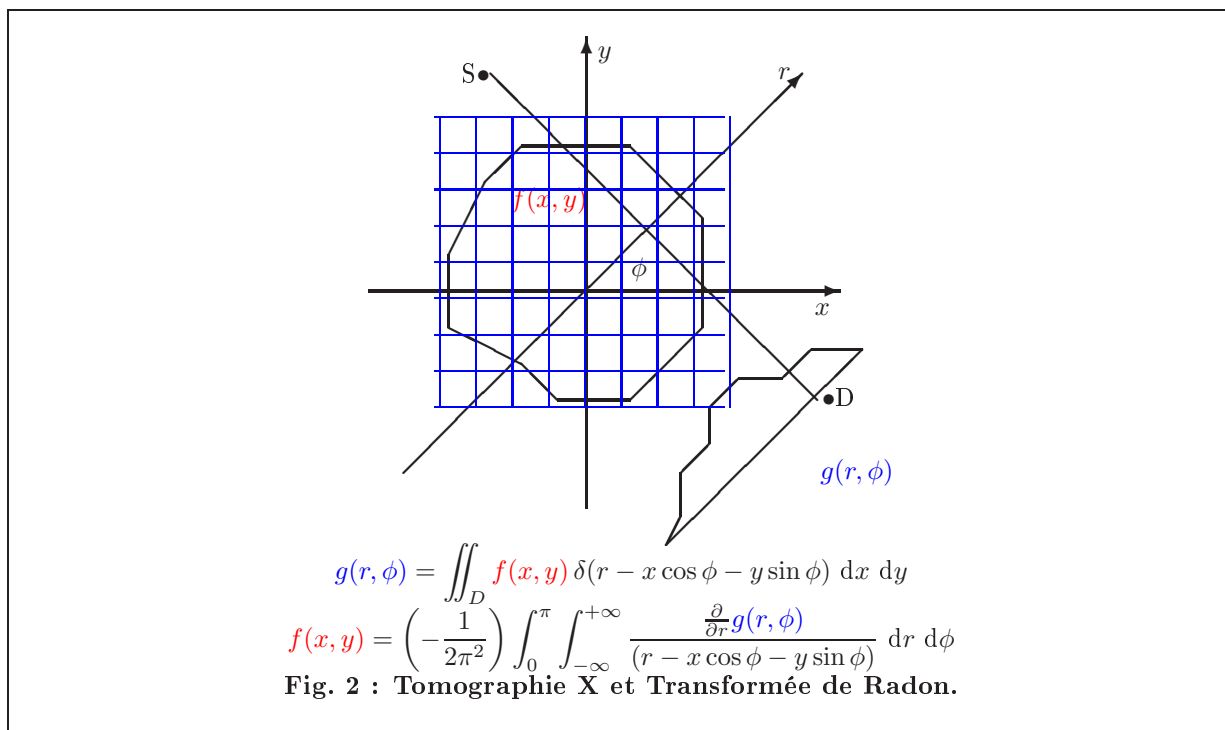


Exercice numéro 3: Tomographie et Reconstruction d'image

En tomographie à rayons X, le modèle qui lie l'intensité des rayons reçus sur un capteur  $g$  est liée à la distribution des coefficients d'absorption de l'intérieur d'un objet  $f$  par une équation intégral. La figure suivante montre cette relation.



Par la suite, nous allons considérer le cas 2D. Dans ce cas, comme nous l'avons vu dans le cours, il y a des relations suivantes entre  $g(r, \phi)$  et  $f(x, y)$ :



# Problème 1 : Méthodes de reconstruction analytiques

Considérons le problème de la reconstruction d'image en tomographie X où la relation entre l'image  $f(x, y)$  et les projections  $g(r, \phi)$  est modélisée par la transformée de Radon (TR):

$$g(r, \phi) = \int_{L(r, \phi)} f(x, y) dl = \iint f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy,$$

où  $L(r, \phi)$  est une droite faisant un angle  $\phi$  avec l'axe des  $y$  et située à une distance  $r$  de l'origine.

Partant de l'équation de l'inversion de la TR, *i.e.*;

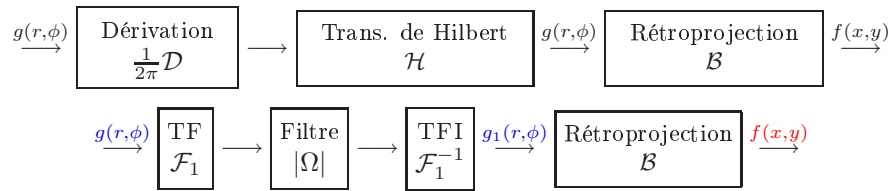
$$f(x, y) = \left(-\frac{1}{2\pi^2}\right) \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial g(r, \phi)}{\partial r}}{(r - x \cos \phi - y \sin \phi)} dr$$

et en utilisant les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Dérivation } \mathcal{D}: & \quad \bar{g}(r, \phi) = \frac{\partial g(r, \phi)}{\partial r} \\ \text{Transformée de Hilbert } \mathcal{H}: & \quad g_1(r', \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{g}(r, \phi)}{(r - r')} dr \\ \text{Rétroprojection } \mathcal{B}: & \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g_1(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \\ \text{Transformée de Fourier 1D } \mathcal{F}_1: & \quad G(\Omega, \phi) = \int g(r, \phi) \exp[-j\Omega r] dr \\ \text{Transformée de Fourier 2D } \mathcal{F}_2: & \quad F(u, v) = \iint f(x, y) \exp[-j(ux + vy)] dx dy \end{aligned}$$

- Montrez que l'on peut reconstruire  $f(x, y)$  par les schémas suivants :

$$f(x, y) = \mathcal{B} \mathcal{H} \mathcal{D} g(r, \phi) = \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} |\Omega| \mathcal{F}_1 g(r, \phi)$$



- Montrez que si on définit

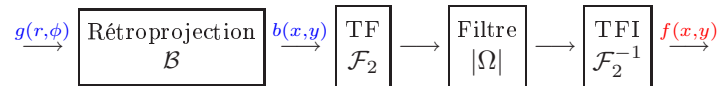
$$b(x, y) = \int_0^\pi g(r, \phi) d\phi = \int_0^\pi g(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi$$

on a une relation entre  $f(x, y)$  et  $b(x, y)$  de la forme

$$b(x, y) = f(x, y) * \frac{1}{[x^2 + y^2]^{1/2}}$$

Montrez alors que

$$f(x, y) = \mathcal{B} \mathcal{F}_2^{-1} |\Omega| \mathcal{F}_2 \mathcal{B} g(r, \phi)$$



où  $|\Omega|^2 = u^2 + v^2$ .

- Si on note  $G(\Omega, \phi)$  la TF1D par rapport à la variable  $r$  de  $g(r, \phi)$  pour un angle fixé  $\phi$  et  $F(u, v)$  la TF2D de  $f(x, y)$ , montrez que

$$F(\Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi) = G(\Omega, \phi).$$

- Montrez que si l'image a une propriété de symétrie de révolution, *i.e.*;  $f(x, y) = f(\rho)$  avec  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , alors on peut la reconstruire seulement à partir d'une seule projection.
- Montrez que si  $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$  alors on peut la reconstruire (à une constante près) seulement à partir de deux projections  $\phi = 0$  et  $\phi = 90$

## Problème 2 : Méthodes de reconstruction algébriques

Dans cette partie, afin de simplifier les relations, nous allons considérer le problème de la reconstruction d'image à partir de seulement deux projections ( $\phi = 0$  et  $\phi = \pi/2$  (Voir Fig. 3)).

1. En supposant que la valeur de  $f$  à l'intérieur de chaque pixel est constante, formez des vecteur  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  et montrez que  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . Que représentent alors les éléments de la matrice  $\mathbf{H}$ ?
2. Considérons le cas où on a deux projections: horizontale et verticale. Que deviennent les éléments de la matrice  $\mathbf{H}$  ?
3. Considérons maintenant une image avec seulement  $(4 \times 4)$  pixels:  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_{16}]'$  et deux projections horizontale et verticale:

$f_1$	$f_5$	$f_9$	$f_{13}$	$g_8$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$g_{24}$
$f_2$	$f_6$	$f_{10}$	$f_{14}$	$g_7$	$f_{21}$	$f_{22}$	$f_{23}$	$f_{24}$	$g_{23}$
$f_3$	$f_7$	$f_{11}$	$f_{15}$	$g_6$	$f_{31}$	$f_{32}$	$f_{33}$	$f_{34}$	$g_{22}$
$f_4$	$f_8$	$f_{12}$	$f_{16}$	$g_5$	$f_{41}$	$f_{42}$	$f_{43}$	$f_{44}$	$g_{21}$
$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$		$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{13}$	$g_{14}$	

$$\mathbf{g}_1 = [g_1, \dots, g_4]' = [g_{11}, \dots, g_{14}]'$$

$$\mathbf{g}_2 = [g_5, \dots, g_8]' = [g_{21}, \dots, g_{24}]'$$

Formez alors les matrices  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}$  telle qu'on puisse écrire

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{f}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{f}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

4. Considérons l'image

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculez alors sa projection.

5. Considérons maintenant le problème inverse: Étant donnée les deux projections trouvez l'image. Pourquoi ce problème est mal-posé ?
6. Montrez que ce problème a une infinité de solutions possibles. Montrez quelque exemples.
7. Trouvez l'expression qui permet de trouver toutes ces solutions.
8. En comparant les relation continue et discrète et les opérateurs direct et adjoint, montrez que l'opération de rétroprojection en continue correspond à l'opérateur de transposition de matrice en discret, autrement dit, la solution  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}'\mathbf{g}$  correspond à la solution au sens de la la rétro-projection. Exprimer alors la matrice  $\mathbf{H}' = [ \mathbf{H}'_1 \mid \mathbf{H}'_2 ]$
9. Montrez que  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}'\mathbf{g} = \mathbf{H}'_1\mathbf{g}_1 + \mathbf{H}'_2\mathbf{g}_2$  est l'addition de deux images. Calculez ces deux images. Que remarque-t-on ?
10. En vue de la définition d'une solution au sens d'inversion généralisée, Calculez les matrices  $\mathbf{H}'\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}\mathbf{H}'$  et montrez que

$$\mathbf{H}\mathbf{H}' = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{H}_1\mathbf{H}'_1 & \mathbf{H}_1\mathbf{H}'_2 \\ \hline \mathbf{H}_2\mathbf{H}'_1 & \mathbf{H}_2\mathbf{H}'_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 4\mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & 4\mathbf{I} \end{array} \right]$$

et

$$\mathbf{H}'\mathbf{H} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{H}'_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_2\mathbf{H}_1 \\ \hline \mathbf{H}'_1\mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2\mathbf{H}_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{H}'_1\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}'_2\mathbf{H}_2 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} + \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{1} + \mathbf{I} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{H}'_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}'_2\mathbf{H}_1 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{array} \right]$$

11. Calculez les valeurs singulières des matrices  $\mathbf{H}\mathbf{H}'$  et  $\mathbf{H}'\mathbf{H}$  et montrez que

$$\text{svd}(\mathbf{H}\mathbf{H}') = [8\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 0]$$

$$\text{svd}(\mathbf{H}'\mathbf{H}) = [8\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

12. Est-ce que ces matrices sont inversibles ?  
 13. Comment alors peut-on définir une solution à ce problème?  
 14. Rappelons qu'une solution au sens des moindres carrés s'écrit:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2\},$$

Montrez que si la matrice  $\mathbf{H}'\mathbf{H}$  est inversible on obtient :  $\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{g}$ .

15. De même, une solution de norme minimale est

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{H}\mathbf{f}=\mathbf{g}} \{\|\mathbf{f}\|^2\}$$

Montrez que si la matrice  $\mathbf{H}\mathbf{H}'$  est inversible on obtient :  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}'(\mathbf{H}\mathbf{H}')^{-1}\mathbf{g}$ .

16. Notez que nous ne pouvons pas Calculer aucune de ces deux solutions car aucune des deux matrices  $\mathbf{H}\mathbf{H}'$  et  $\mathbf{H}'\mathbf{H}$  est inversible. Notons cependant que si on ne garde que les éléments diagonaux de ces deux matrices, on obtient des résultats suivants :

`fh=diag(1./diag(AtA))*A'*p;reshape(fh,4,4)`

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

`fh=A'*diag(1./diag(AAt))*p;reshape(fh,4,4)`

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 & .5 & .5 & 0 \\ .5 & 1 & 1 & .5 \\ .5 & 1 & 1 & .5 \\ 0 & .5 & .5 & 0 \end{bmatrix}$$

Commenter ces deux résultats.

17. Nous avons vu dans le cours qu'il est cependant possible de calculer la solution inverse généralisée qui est la solution de norme minimale de  $\mathbf{H}'\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{H}'\mathbf{g}$  en utilisant la décomposition tronquée des valeurs singulières (DTVS):

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_{k=1}^k \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_k \rangle}{\lambda_k} \mathbf{v}_k$$

où  $\mathbf{u}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont, respectivement, des vecteurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}'$  et de  $\mathbf{H}'\mathbf{H}$  et  $\lambda_k$  sont des valeurs singulières associées.

`[U,S,V]=svd(A);`  
`s=diag(S);s1=[1./s(1:7);zeros(1,1)];`  
`S1=[diag(s1);zeros(8,8)];`  
`fh=V*S1*U'*p;reshape(fh,4,4)`

Dans cet exemple  $K = 7$  et la solution IG peut être calculée par :

`fh=svdpca(A,p,.1,7);reshape(fh,4,4)`

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 \\ 0.2500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.2500 \\ -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 \end{bmatrix}$$

Commenter ce résultat.

18. Montrez que le noyau de la transformation linéaire  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ , i.e.  $\{\mathbf{f} | \mathbf{H}\mathbf{f} = 0\}$  est

$$\mathbf{V}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S})\mathbf{z} = \sum_{k=K+1}^N z_k \mathbf{v}_k$$

avec  $\mathbf{z}$  un vecteur arbitraire. Ceci nous permet de trouver toutes les solutions possibles du problème en rajoutant ce terme arbitraire à la solutions IG.

19. Montrez que l'algorithme itératif suivant:

```
for k=1:100;
fh=fh+.1*A'*(p-A*fh(:));
end;
reshape(fh,4,4) fourni ce résultat:
```

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 \\ 0.2500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.2500 \\ -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 \end{bmatrix}$$

Commenter ce résultat.

20. On peut remarquer que la manque d'information dans les données est telle que la contrainte de norme minimal ne restreint pas suffisamment l'espace des solutions possibles. Dans les problèmes inverses en imagerie, une information qui est souvent disponible est la positivité de la solution. Imposer alors à la solution d'être positive est alors une technique souvent utilisée. Une approche simple dans les méthodes itérative pour imposer cette contraintes est simplement l'imposer à chaque itération :

```
for k=1:100
fh=fh+.1*A'*(p-A*fh(:));
fh=fh.*(fh>0);
end
reshape(fh,4,4);
```

$$fh = \begin{bmatrix} 0 & 0.0000 & 0.0000 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0000 & 0.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

Commenter ce résultat.

21. Proposer d'autres méthodes.