Exercice numéro 4: Déconvolution par moindres carrés et régularisation: Cas continu

Problème 1: Déconvolution

Considérons le problème de la déconvolution où le signal

mesuré $g(t)$ est relié au signal d'entrée $f(t)$ et à la réponse impulsionnelle $h(t)$ par $g(t) = h(t)*f(t)+\epsilon(t)$ et où on cherche à estimer $h(t)$ et $f(t)$ à partir de mesure de $g(t)$.

1. Supposons d'abord $h(t)$ connue (déconvolution simple). Définissons la solution $\widehat{f}(t)$ par

$$\widehat{f}(t) = \arg\min_{x} \left\{\|g - h * f\|^2 + \lambda_1 \|d_f * f\|^2\right\},$$

où $d_f(t)$ et λ_1 sont connues et fixées et où la norme $\|z\|^2$ signifie

$$\|z\|^2 = \int |z(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Montrez que cette solution peut être calculée par

$$F(\nu) = \frac{H^*(\nu)}{|H(\nu)|^2 + \lambda_1 |D_f(\nu)|^2} G(\nu),$$

où $F(\nu)$ et $G(\nu)$ sont les fonctions densité spectrale de puissance (dsp) de $f(t)$ et de $g(t)$ et $H(\nu)$ et $D_f(\nu)$ sont les TF de $h(t)$ et de $d_f(t)$.

2. Que devient cette solution lorsque $\lambda_1 = 0$?

3. Quel est le rôle de d_f ou $D_f(\nu)$? Comment le choisir ?

4. Cherchons maintenant à estimer $h(t)$ à partir de la mesure de $g(t)$ et de $f(t)$ (identification). Définissons la solution $\widehat{h}(t)$ par

$$\widehat{h}(t) = \arg\min_{h} \left\{\|g - h * f\|^2 + \lambda_2 \|d_h * h\|^2\right\}.$$

Montrez que cette solution peut être calculée par

$$H(\nu) = \frac{X^*(\nu)}{|F(\nu)|^2 + \lambda_2 |D_h(\nu)|^2} G(\nu).$$

5. Que devient cette solution lorsque $\lambda_2 = 0$?

6. Quel est le rôle de d_h ou $D_h(\nu)$? Comment le choisir ?

7. Supposons maintenant qu'on souhaite estimer $h(t)$ et $f(t)$ à partir de la seule mesure de $g(t)$ (déconvolution aveugle). Peut-on envisager de définir la solution par

$$\left(\widehat{f}(t), \widehat{h}(t)\right) = \arg\min_{(x,h)} \left\{\|g - h * f\|^2 + \lambda_1 \|d_f * f\|^2 + \lambda_2 \|d_h * h\|^2\right\}?$$

Pourquoi? Ce critère a-t-il une seule solution. Commenter votre réponse.

Problème 2: Déconvolution – Cas discret

Considérons maintenant le même problème dans le cas discret et faisons l'hypothèse que le système est causal et que les signaux sont causaux et à durée limitées et notons $\boldsymbol{h} = [h_0, \cdots, h_p]^t$, $\boldsymbol{f} = [f_0, \cdots, f_M]^t$ et $\boldsymbol{g} = [g_0, \cdots, g_M]^t$.

1. Trouvez la matrice $\boldsymbol{H}$ de telle sorte que l'on puisse écrire $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{b}$.
2. Quelle est la structure de cette matrice ?
3. Comment peut-on rendre cette matrice circulante ?
4. Trouvez la matrice $\boldsymbol{F}$ de telle sorte que l'on puisse écrire $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{h} + \boldsymbol{b}$.
5. Quelle est la structure de cette matrice ?
6. Comment peut-on rendre cette matrice circulante ?
7. Supposons d'abord $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{g}$ connus. Définissons la solution $\widehat{\boldsymbol{f}}$ par
$$\widehat{\boldsymbol{f}} = \arg\min_{\boldsymbol{f}} \left\{ |\boldsymbol{g} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}|^2 + \lambda_f |\boldsymbol{D}_f \boldsymbol{f}|^2 \right\},$$
où $\boldsymbol{D}_f$ est la matrice de la différence finie (approximation de la dérivation d'ordre un).
8. Écrivez l'expression de cette solution.
9. Que devient cette solution lorsque $\lambda = 0$?
10. Proposez une méthode pour calculer cette solution et commenter votre choix.
11. Supposons que nous avons rendu les matrice $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{D}_f$ circulantes. Montrez alors que cette solution peut être calculée par
$$F(\nu) = \frac{H^*(\nu)}{|H(\nu)|^2 + \lambda_1 |D_f(\nu)|^2} G(\nu),$$
où $F(\nu)$ et $G(\nu)$ sont les TF de $f(t)$ et de $g(t)$ et $H(\nu)$ et $D_f(\nu)$ sont les TF de $h(t)$ et de $d_f(t)$.
12. Supposons maintenant $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ connus. Définissons la solution $\widehat{\boldsymbol{h}}$:
$$\widehat{\boldsymbol{h}} = \arg\min_{\boldsymbol{h}} \left\{ |\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\boldsymbol{h}|^2 + \lambda_2 |\boldsymbol{D}_h \boldsymbol{h}|^2 \right\}$$
où $\boldsymbol{D}_h$ est une matrice connue.
13. Écrivez l'expression de cette solution.
14. Que devient cette solution lorsque $\lambda = 0$?
15. Proposez une méthode pour calculer cette solution et commenter votre choix.
16. Supposons que nous avons rendu les matrice $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{D}_f$ circulantes. Montrez alors que cette solution peut être calculée par
$$H(\nu) = \frac{X^*(\nu)}{|F(\nu)|^2 + \lambda_2 |D_h(\nu)|^2} G(\nu).$$
où $F(\nu)$ et $G(\nu)$ sont les TF de $f(t)$ et de $g(t)$ et $H(\nu)$ et $D_f(\nu)$ sont les TF de $h(t)$ et de $d_f(t)$.
17. Supposons maintenant qu'on souhaite estimer $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{f}$ à partir de la seule mesure de $\boldsymbol{g}$ (déconvolution aveugle). Peut-on envisager de définir la solution par
$$(\widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{\boldsymbol{h}}) = \arg\min_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{h})} \left\{ |\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\boldsymbol{h}|^2 + \lambda_f |\boldsymbol{D}_f \boldsymbol{f}|^2 + \lambda_2 |\boldsymbol{D}_h \boldsymbol{h}|^2 \right\}$$
Pourquoi? Ce critère a-t-il une seule solution. Commenter votre réponse.