

# PROBLÈMES INVERSES ET SES APPLICATIONS

[Ali MOHAMMAD-DJAFARI](#)

Laboratoire des signaux et systèmes

Supélec, Plateau de Moulon

91192 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE.

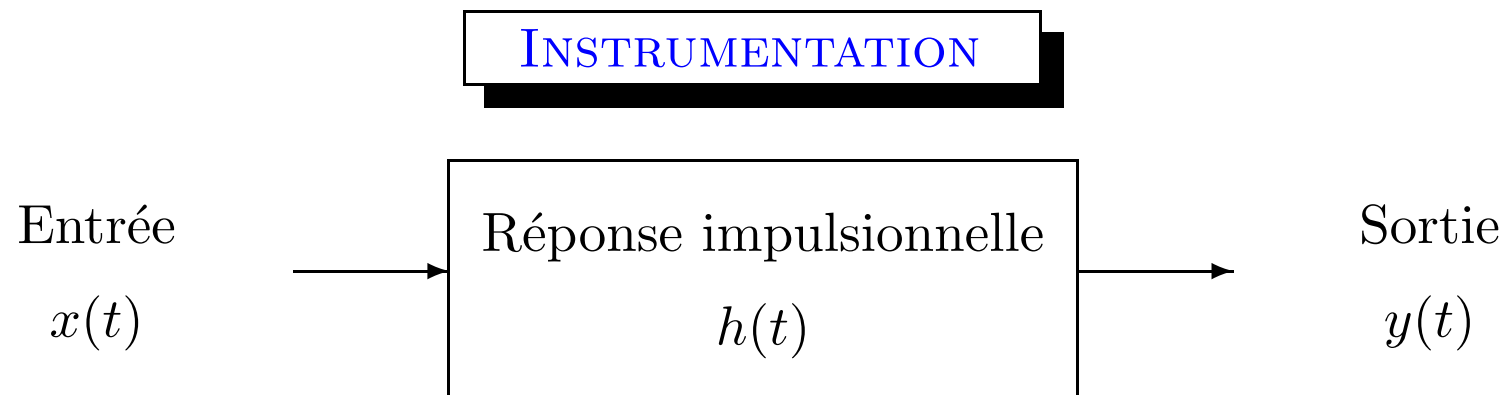
[djafari@lss.supelec.fr](mailto:djafari@lss.supelec.fr)

<http://djafari.free.fr>

<http://www.lss.supelec.fr/perso/djafari>

## DOMAINES D'APPLICATION

1. Instrumentation
2. Télécommunication (Égalisation du canal, élimination d'écho, ...)
3. Imagerie satellitaire
4. Microscopie électronique, Spectrometrie, Calorimétrie, ...
5. Imagerie médicale (Tomographie X, TEP, IRM, échographie,...)
6. Imagerie en CND (microondes, ultrasons, courant de Foucault,...)
7. Imagerie en géophysiques (sismiques,...)
8. Imagerie en radio astronomie (radio, optique, gamma, ...)
9. Imagerie radar (SAR)
10. Vision par ordinateur (stéréo vision, 3D à partir de 2D, ...)

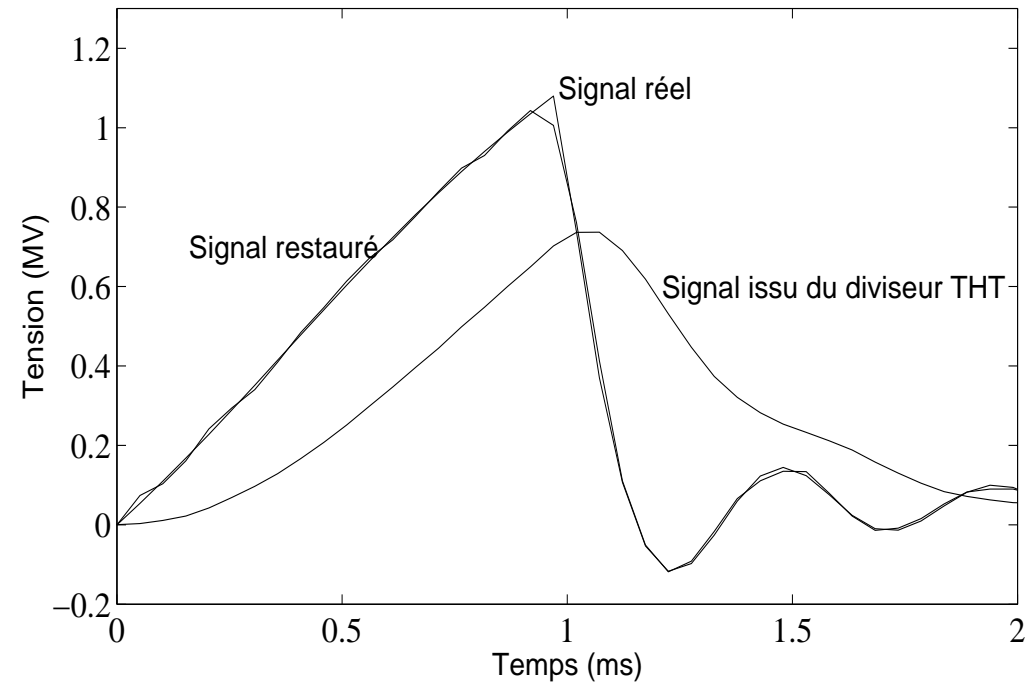


- Instrument idéal  $y(t) = x(t)$  n'existe pas.
- Un instrument linéaire et invariant dans le temps se caractérise par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ .
- Instrument idéal  $h(t) = \delta(t)$  n'existe pas.
- **Problème direct** :  $x(t), h(t) \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$
- Deux problèmes inverses liés à l'instrumentation :
  - **Inversion** :  $y(t), h(t) \longrightarrow x(t)$
  - **Identification** :  $y(t), x(t) \longrightarrow h(t)$

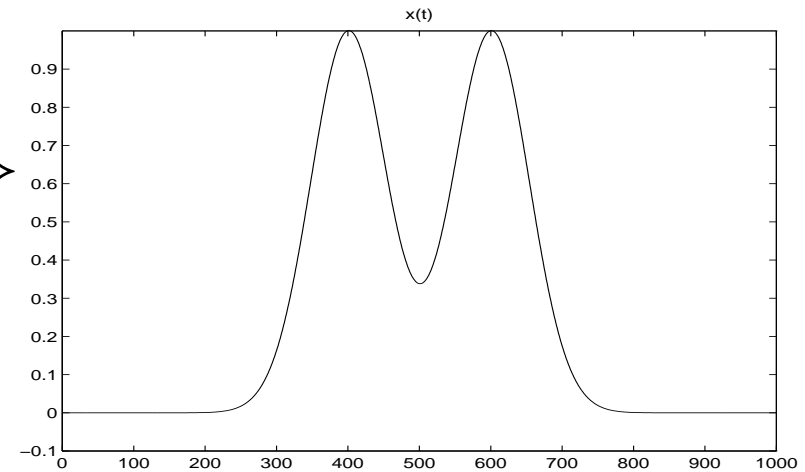
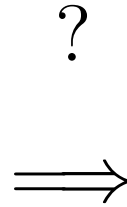
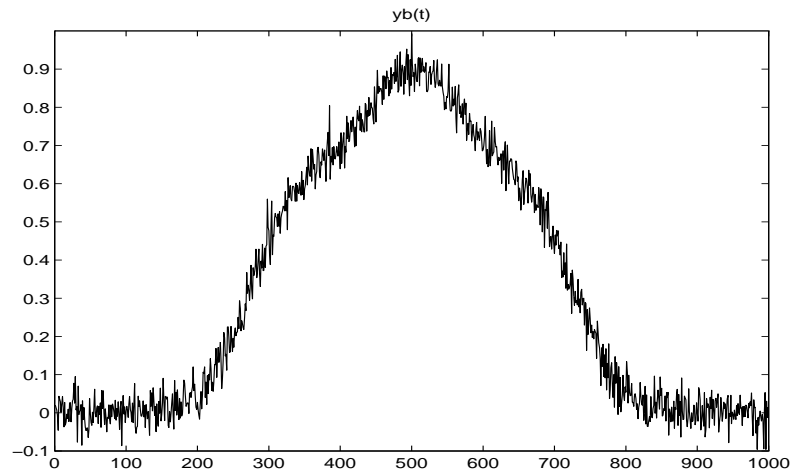
## Ex1: RÉSISTANCE DES ISOLATEURS AUX CHOCS DE Foudre



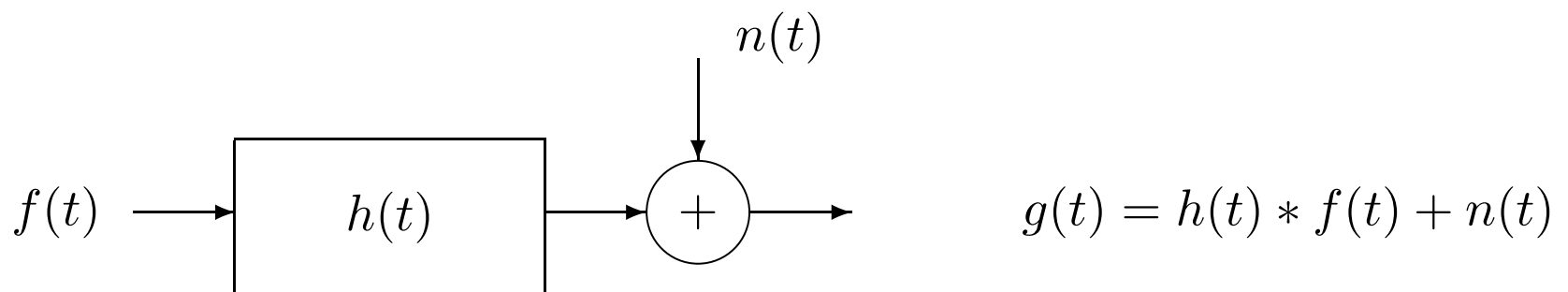
Dispositif permettant d'appliquer  
une onde de choc  
EDF— Les Renardières



Très hautes tensions  
réelle et estimée

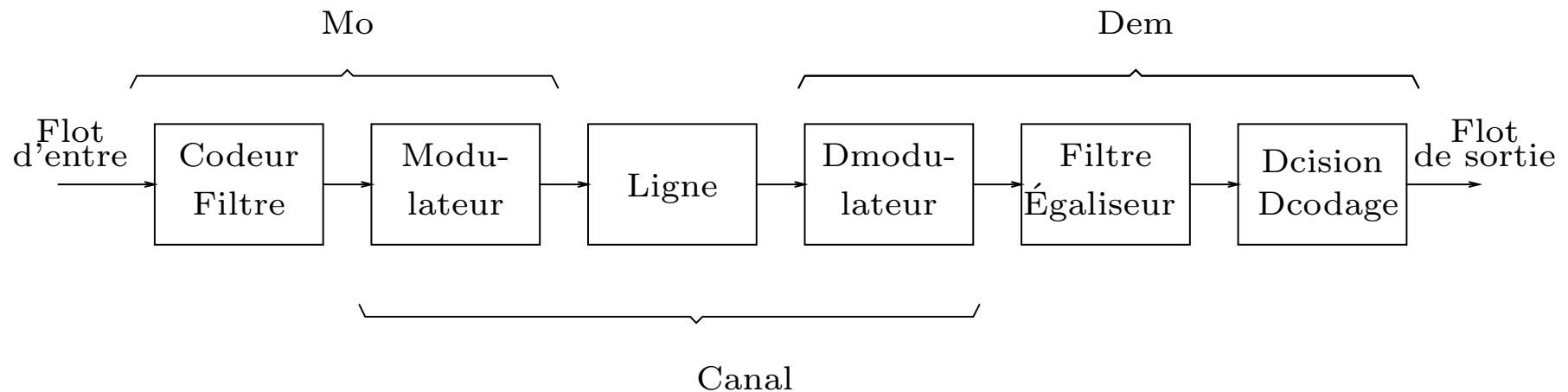
**Ex2: RADIO-ASTRONOMIE**

Modèle d'observation

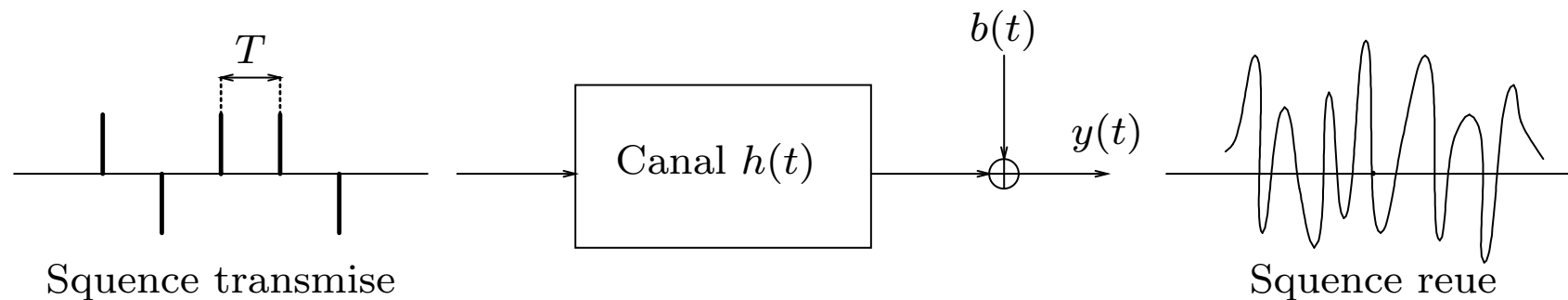


## TÉLÉCOMMUNICATION: ÉGALISATION D'UN CANAL DE TRANSMISSION

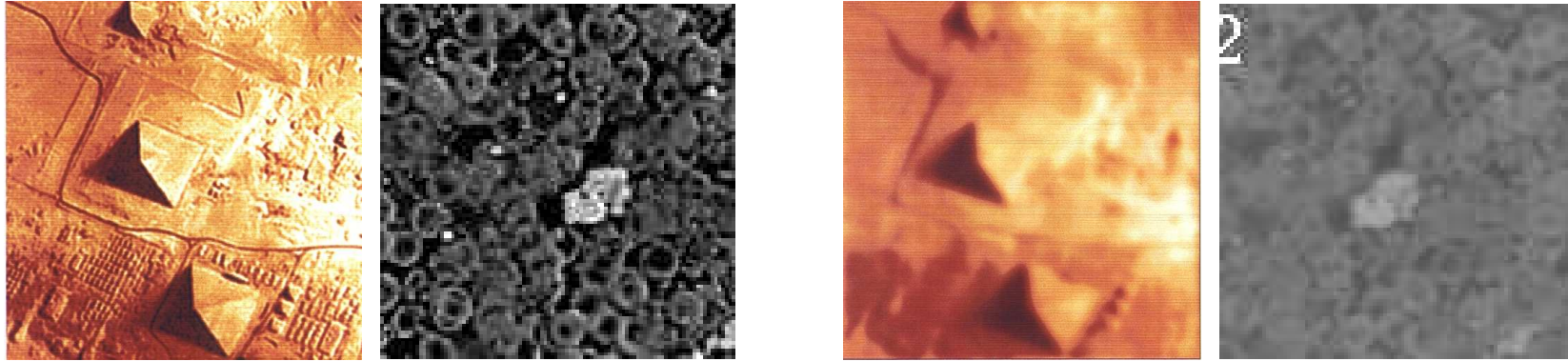
- Système de transmission de données



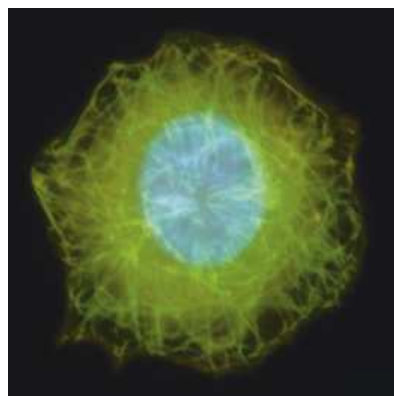
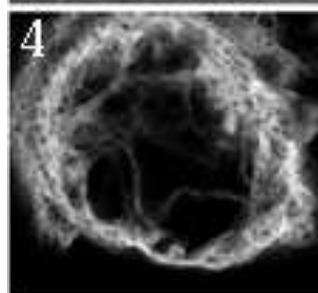
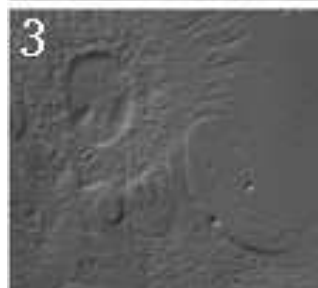
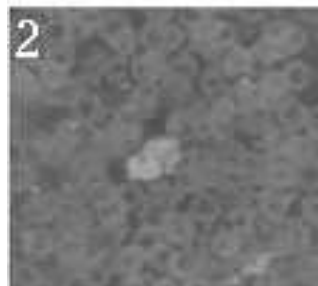
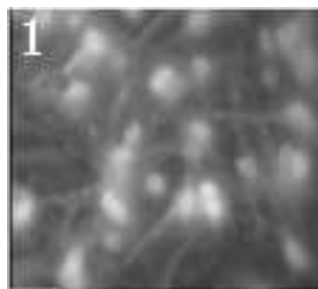
- Modèle du canal : convolution bruitée



## IMAGERIE SATELLITAIRE, MICROSCOPIE, ...

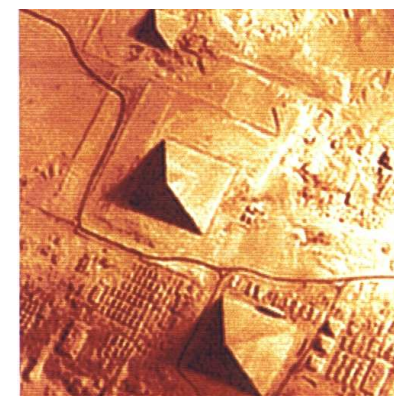
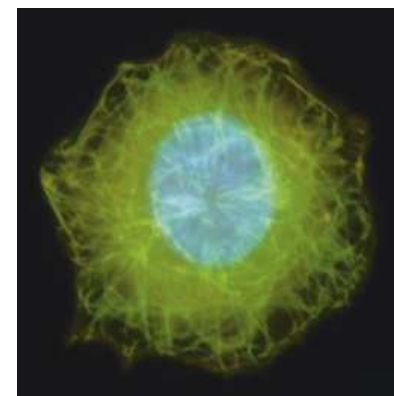
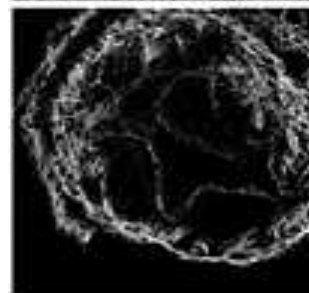
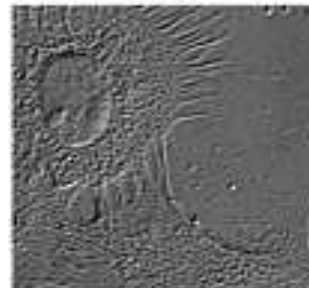
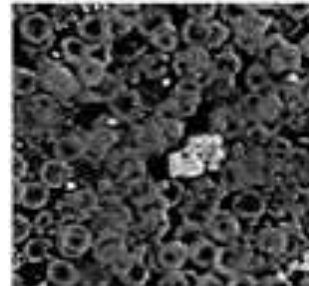
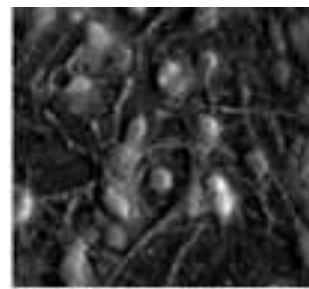


- La procédé de la formation d'image n'est pas parfaite.
- Les capteurs CCD introduisent un flou.
- Souvent l'ensemble du système de mesure peut être modélisé par une convolution bivariable.
- **Problème direct** :  $f(x, y), h(x, y) \longrightarrow g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$
- Deux problèmes inverses liés :
  - **Inversion** :  $g(x, y), h(x, y) \longrightarrow f(x, y)$
  - **Identification** :  $g(x, y), f(x, y) \longrightarrow h(x, y)$



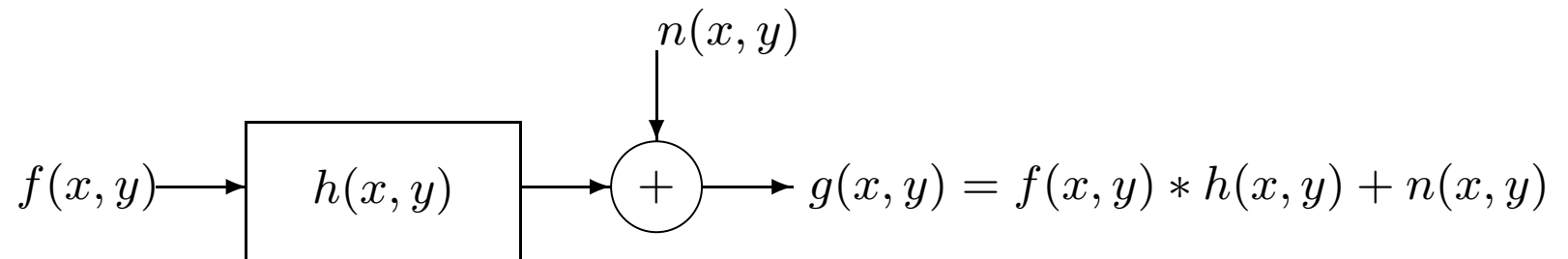
?

⇒





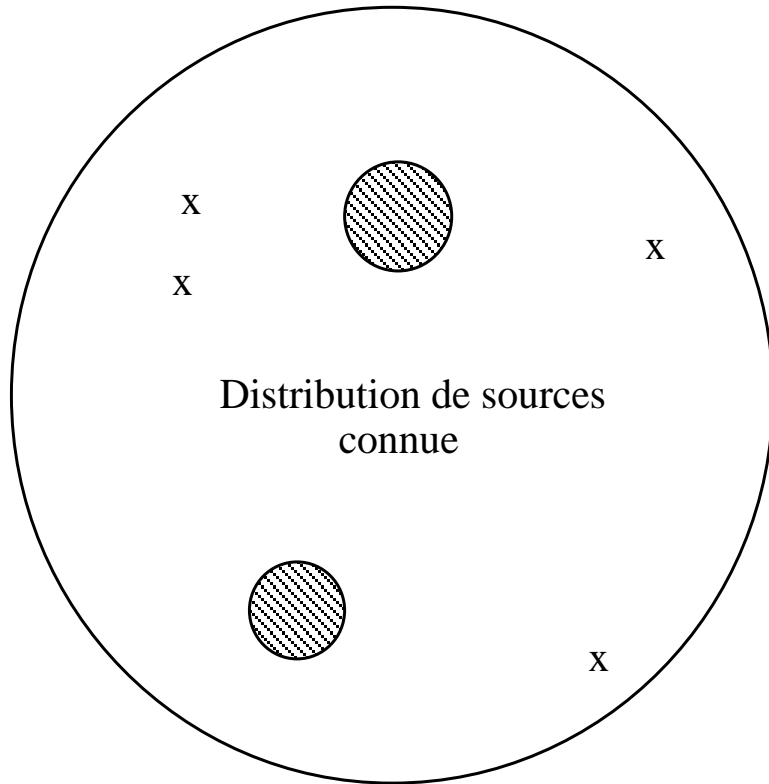
## RESTAURATION D'IMAGE



Modèle d'observation

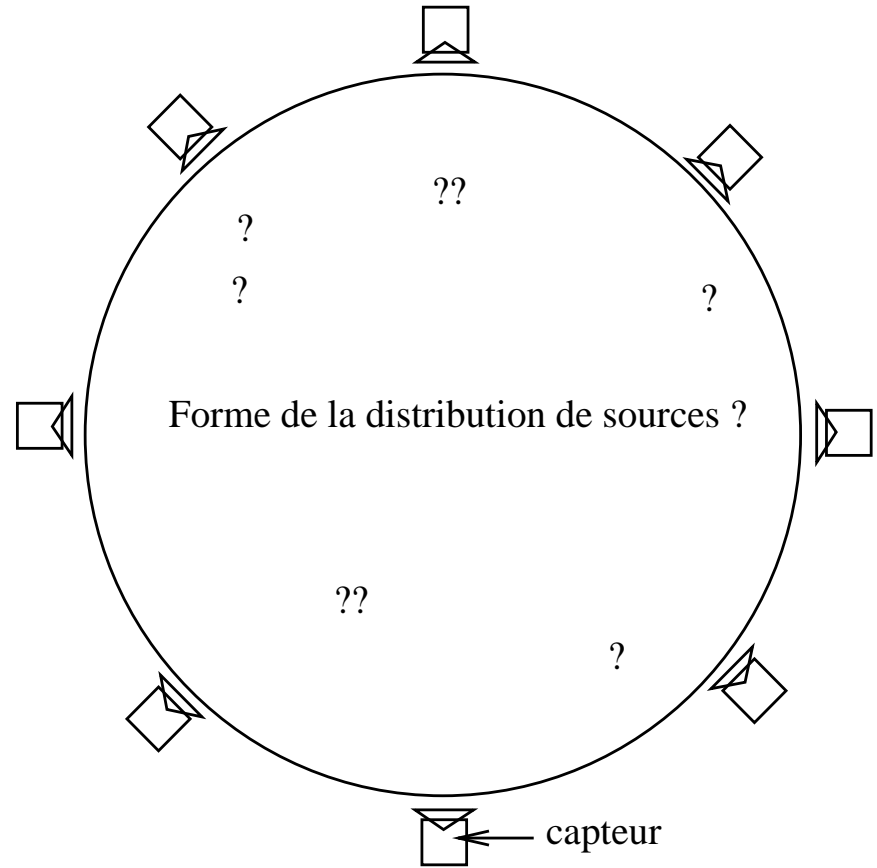


# PROBLÈMES INVERSES EN IMAGERIE



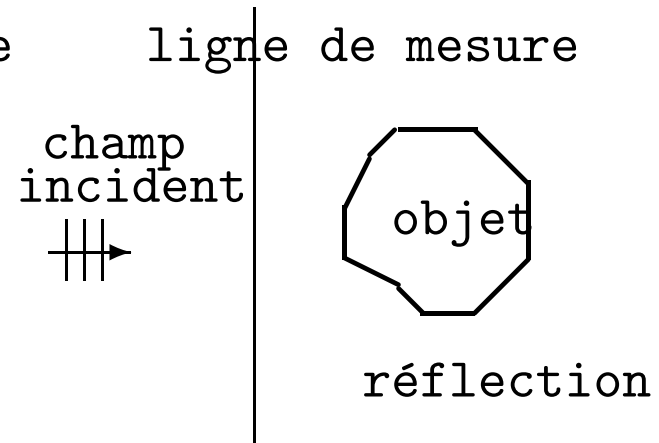
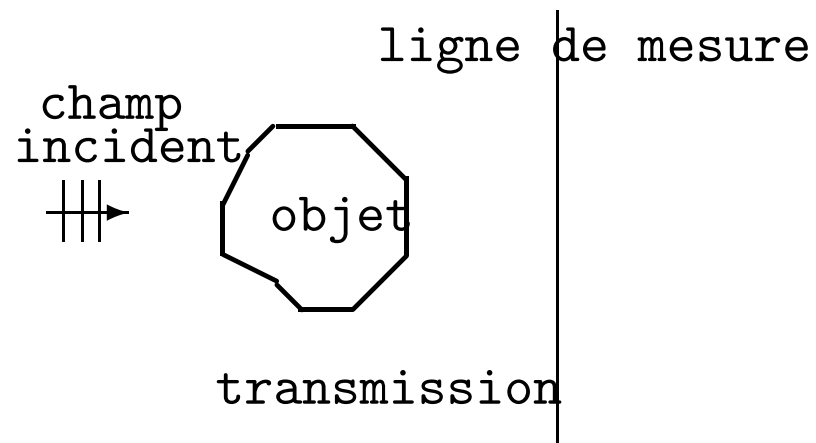
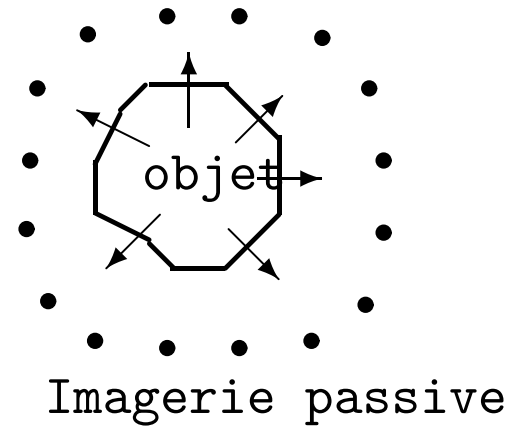
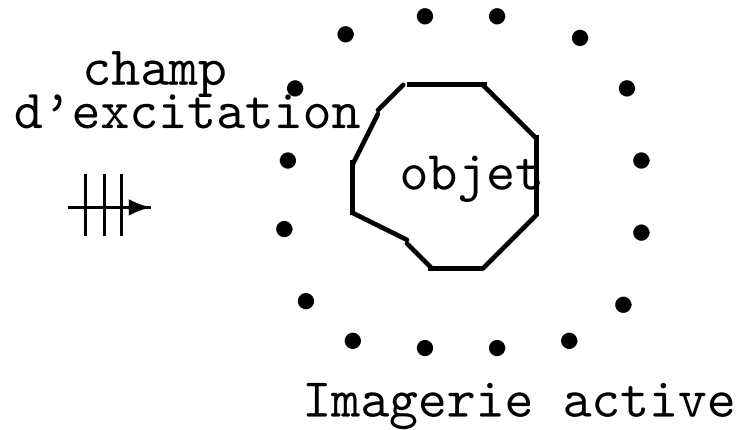
Valeur du champ rayonné ? (p. ex. sur une sphère)

Problème direct

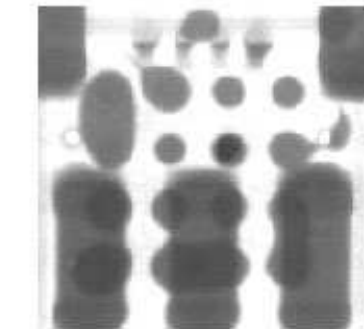
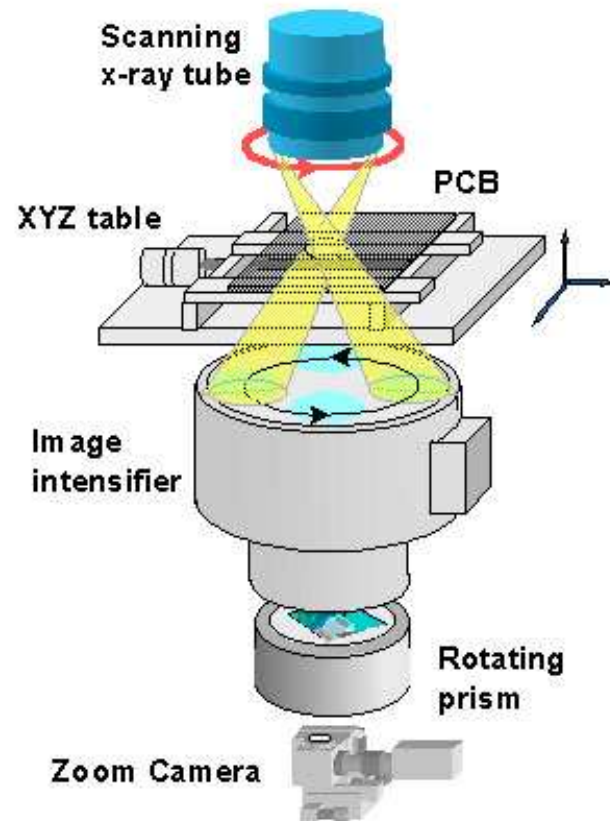


Problème inverse

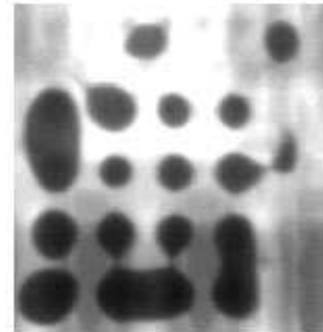
# IMAGERIE MÉDICALE: TOMOGRAPHIE



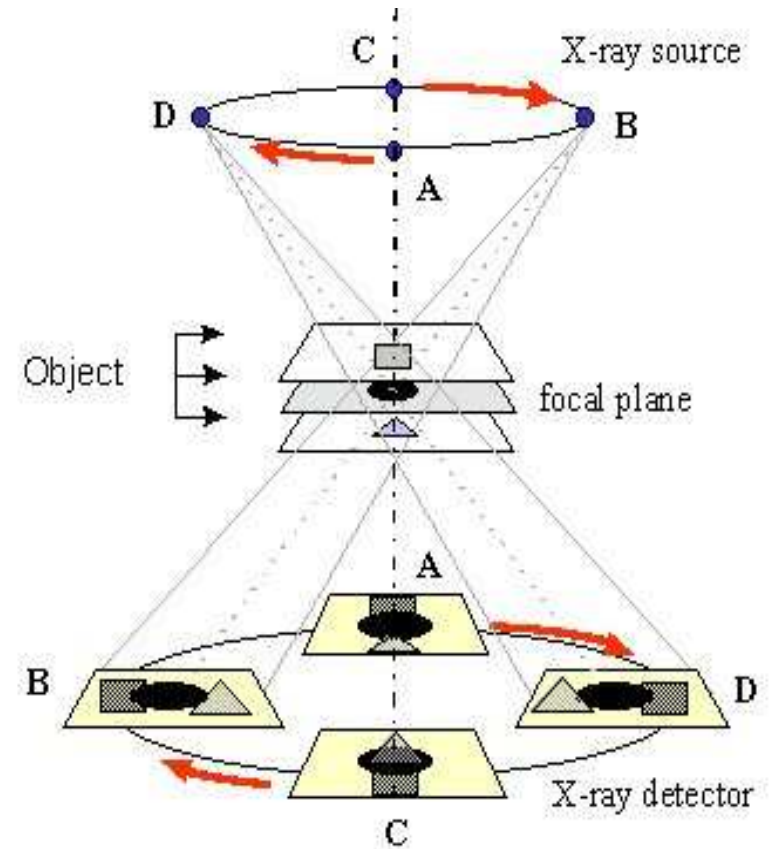
# IMAGERIE TOMOGRAPHIQUE EN CONTRÔLE NON DESTRUCTIF (CND)



X-ray radiography image

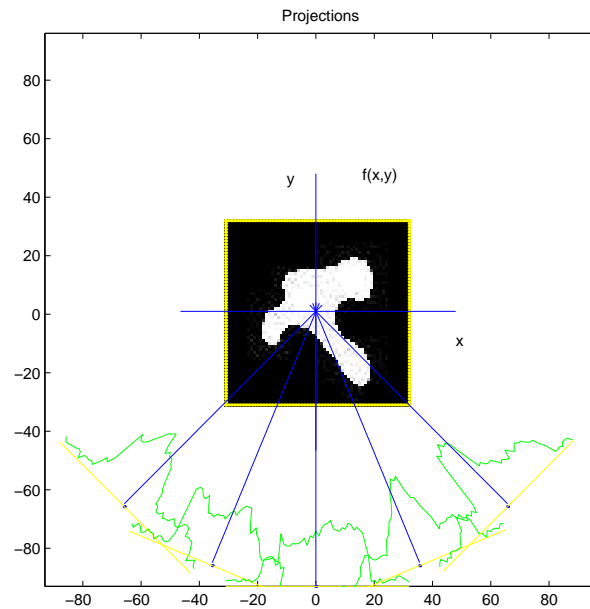


X-ray cross-sectional image

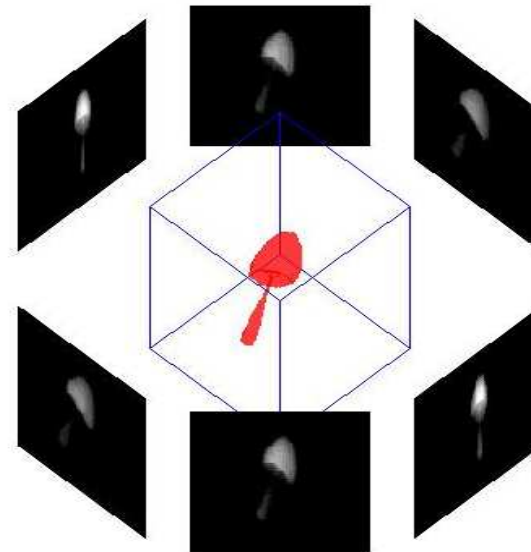


## TOMOGRAPHIE X

### 2D



### 3D



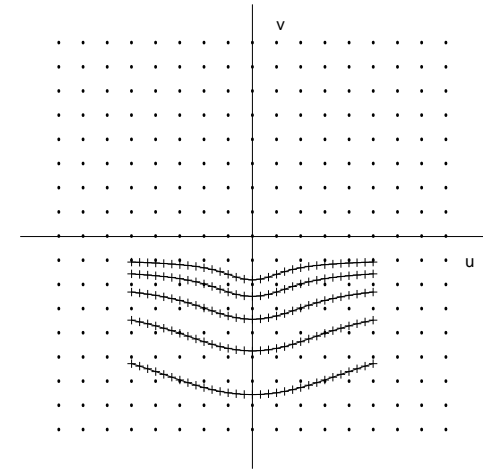
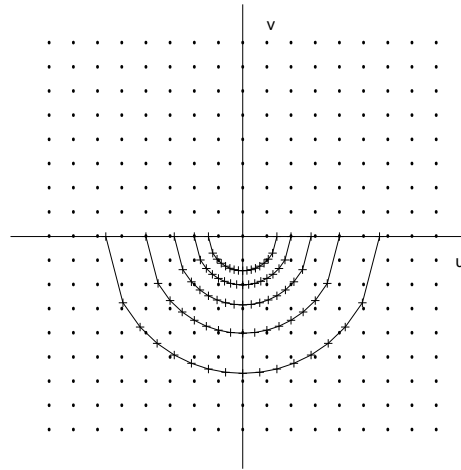
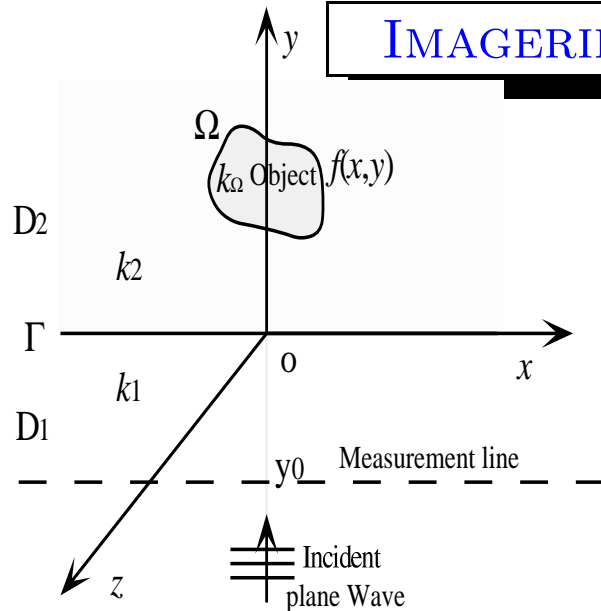
$$p_{\theta}(t) = \int_{\mathcal{L}_{t,\theta}} f(x, y) dl$$

$$p_{\theta,\phi}(t_1, t_2) = \int_{\mathcal{L}_{t_1,t_2,\theta,\phi}} f(x, y, z) dl$$

▣ Problème direct :  $f(x, y)$  ou  $f(x, y, z) \longrightarrow p_{\theta}(t)$  ou  $p_{\theta,\phi}(t_1, t_2)$

▣ Problème inverse :  $p_{\theta}(t)$  ou  $p_{\theta,\phi}(t_1, t_2) \longrightarrow f(x, y)$  ou  $f(x, y, z)$

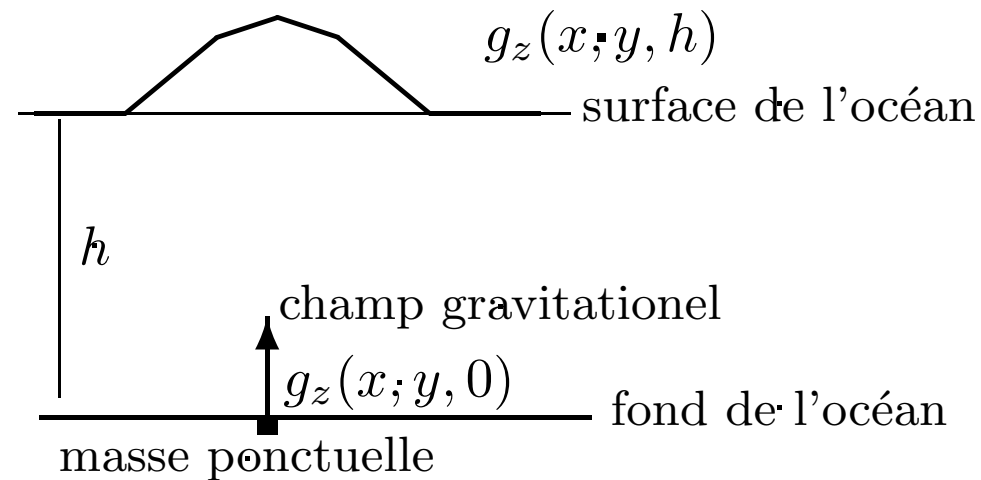
## IMAGERIE PAR COURANTS DE FOUCAULT



$$\hat{E}_s(u, y_0) = \frac{2T}{\delta^2} \frac{\exp[-j\beta_1 y_0]}{\beta_1 + \beta_2} \iint_{\Omega} f(x', y') \exp[-j[ux' - (k_2 + \beta_2)y']] dx' dy'$$

- TF 1D de  $E(x, y_0) \longrightarrow$  TFL de  $f(x, y) \simeq -\frac{\sigma(x, y) - \sigma_0}{\sigma_0}$
- Négliger entièrement l'atténuation :  
TF 1D de  $E(x, y_0) \longrightarrow$  TF 2D de  $f(x, y)$  contours demi-cercles
- Négliger partiellement l'atténuation :  
TF 1D de  $E(x, y_0) \longrightarrow$  TF 2D de  $f(x, y)$  contours plus complexes.

## IMAGERIE EN GÉOPHYSIQUES

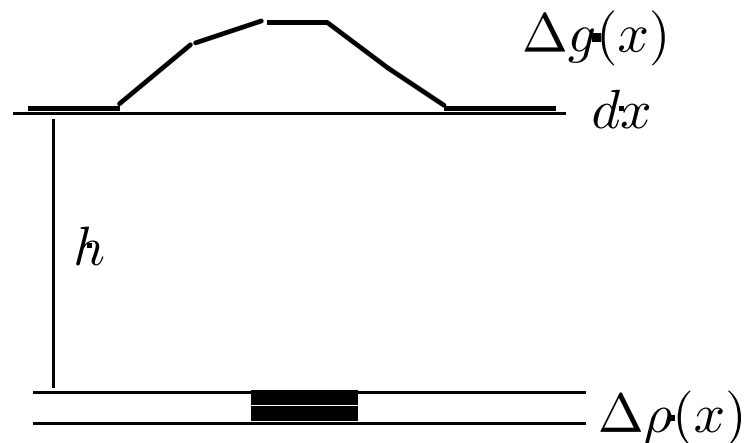


$$g(\mathbf{x}) = (g_x, g_y, g_z) = \frac{-MG\bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{-M\gamma(\bar{x}x + \bar{y}y + \bar{z}z)}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

$$g_z(h) = \frac{h}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

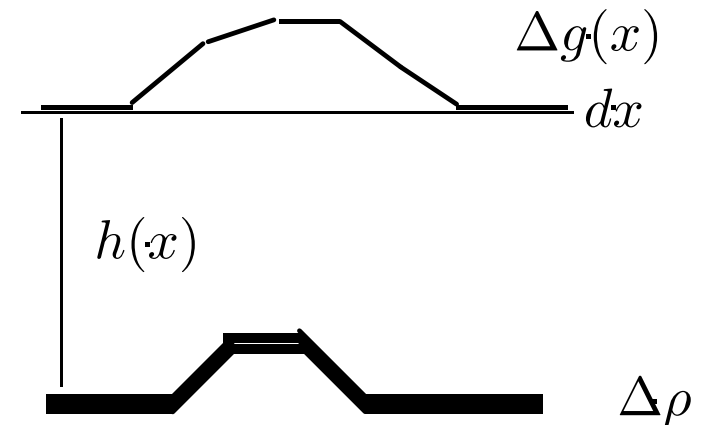
$$g_z(h, x, y) = \int \int \frac{hg_z(0, s_1 - x, s_2 - y)}{2\pi(s_1^2 + s_2^2 + h^2)^{3/2}} ds_1 ds_2$$

## IMAGERIE EN GÉOPHYSIQUES



$$\Delta g(s) = \int \frac{h}{[(x-s)^2 + h^2]^{3/2}} \Delta\rho(x) dx$$

problème linéaire

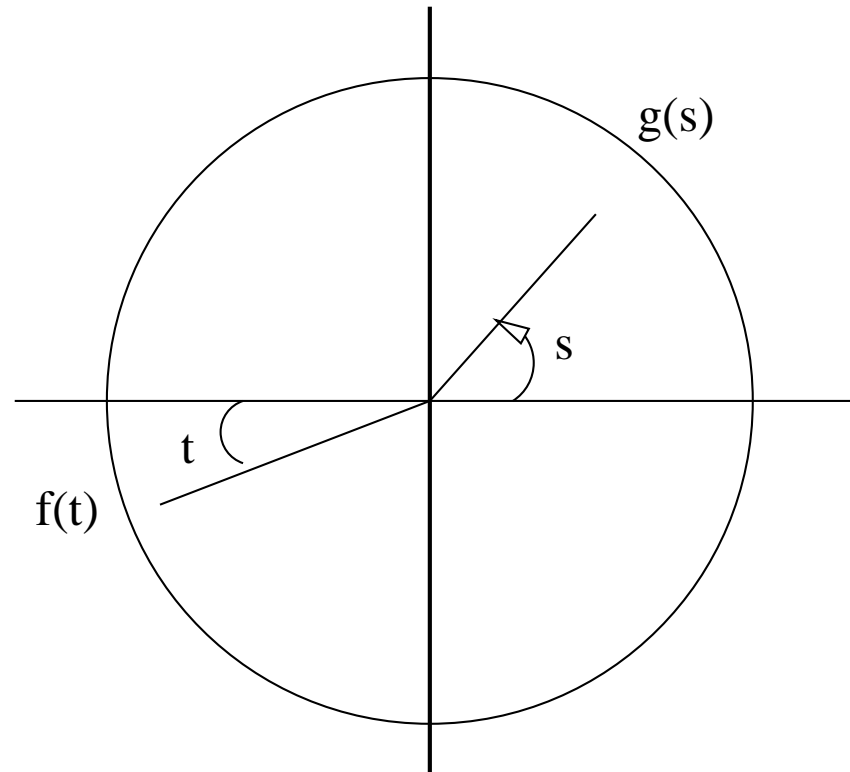


$$\Delta g(s) = \int \frac{h(x)}{[(x-s)^2 + h(x)^2]^{3/2}} \Delta\rho dx$$

problème non linéaire



## IMAGERIE EN OPTIQUE



$$g(s) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(s) + \cos(t)]^2 \left[ \frac{\sin[\pi(\sin(s) + \sin(t))]}{[\pi(\sin(s) + \sin(t))]} \right]^2 f(t) dt$$

## PROBLÈMES INVERSES : FORMALISATION

$$\mathcal{A} \quad ( \quad \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \quad ) = 0$$

modèle
mesures
grandeurs  
inconnues
grandeurs inconnues  
intermédiaires
erreurs  
et bruit

### Cas particuliers :

- Modèle implicite avec relation entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  :
 
$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathcal{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \end{cases}$$
  
- Modèle non linéaire simple :
 
$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon}$$
  
- Modèle linéaire + bruit additif :
 
$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}$$

## IMAGERIE À ONDES DIFFRACTÉES

Mesures : champ diffracté par objet  $\phi_d(\mathbf{r}_i)$

Grandeur inconnue :  $x(\mathbf{r}) = k_0^2(n^2(\mathbf{r}) - 1)$

Grandeurs intermédiaires :  $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi_d(\mathbf{r}_i) = \iint_D G_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') x(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_i \in S$$

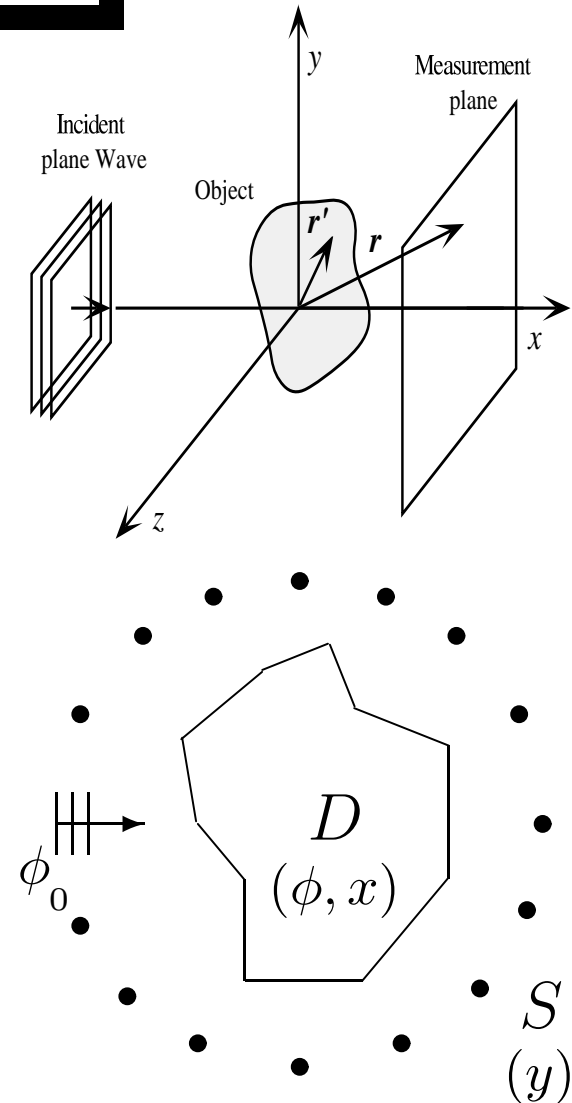
$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \iint_D G_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') x(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in D$$

**Approximation de Born** ( $\phi(\mathbf{r}') \simeq \phi_0(\mathbf{r}')$ ) :

$$\phi_d(\mathbf{r}_i) = \iint_D G_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') x(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_i \in S$$

**Discrétisation :**

$$\begin{cases} \phi_d = \mathbf{G}_M \mathbf{X} \phi \\ \phi = \phi_0 + \mathbf{G}_O \mathbf{X} \phi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \phi_d = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_M \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X})^{-1} \phi_0 \end{cases}$$



## PROBLÈMES INVERSES LINÉAIRES

$$g(\mathbf{s}_i) = \int f(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) d\mathbf{r} + n(\mathbf{s}_i), \quad i = 1, \dots, M$$

- Débruitage & Interpolation:  $g(\mathbf{r}_i) = f(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}_i)$

- Déconvolution:  $g(\mathbf{r}_i) = \int f(\mathbf{r}') h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + n(\mathbf{r}_i)$

- Reconstruction d'image :

$$g(x_i, y_j) = \iint f(x', y') h(x_i - x', y_j - y') dx' dy' + n(x_i, y_j)$$

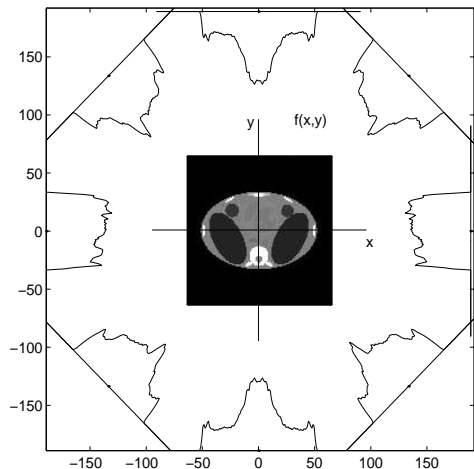
- Reconstruction d'image :

$$g(r_i, \phi_j) = \iint f(x, y) \delta(r_i - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy + n(r_i, \phi_j)$$

- Synthèse de Fourier :

$$g(\Omega_i, \phi_j) = \iint f(x, y) \exp [j(x\Omega_i \cos \phi_j + y\Omega_i \sin \phi_j)] dx dy + n(\Omega_i, \phi_j)$$

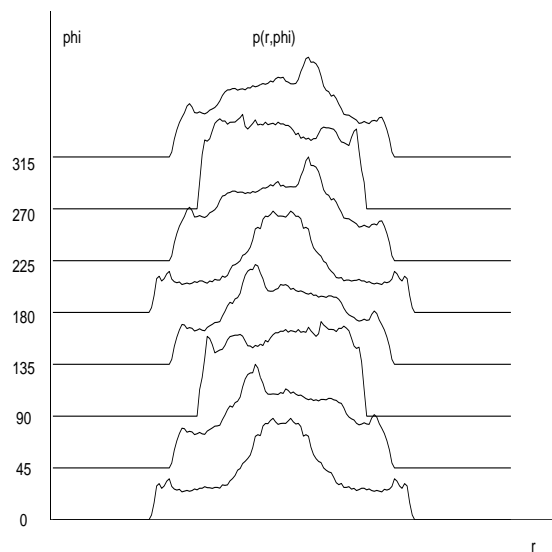
# RECONSTRUCTION D'IMAGE EN TOMOGRAPHIE X



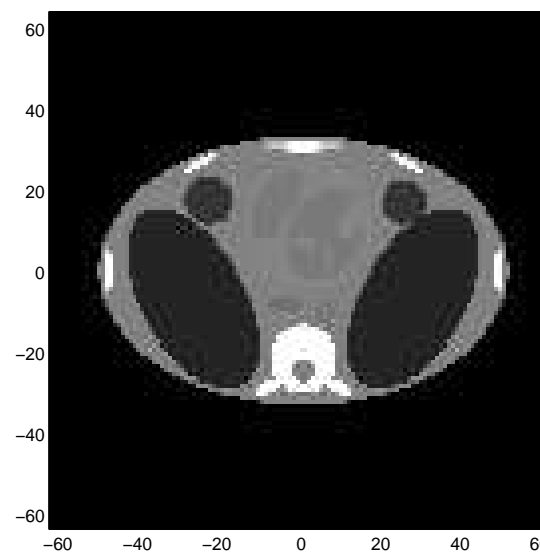
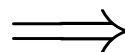
$$f(x, y) \rightarrow \boxed{\text{TR}} \rightarrow p(r, \phi)$$

$$p(r, \phi) = \int_{L_{r, \phi}} f(x, y) dl$$

$$p(r, \phi) = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$



?

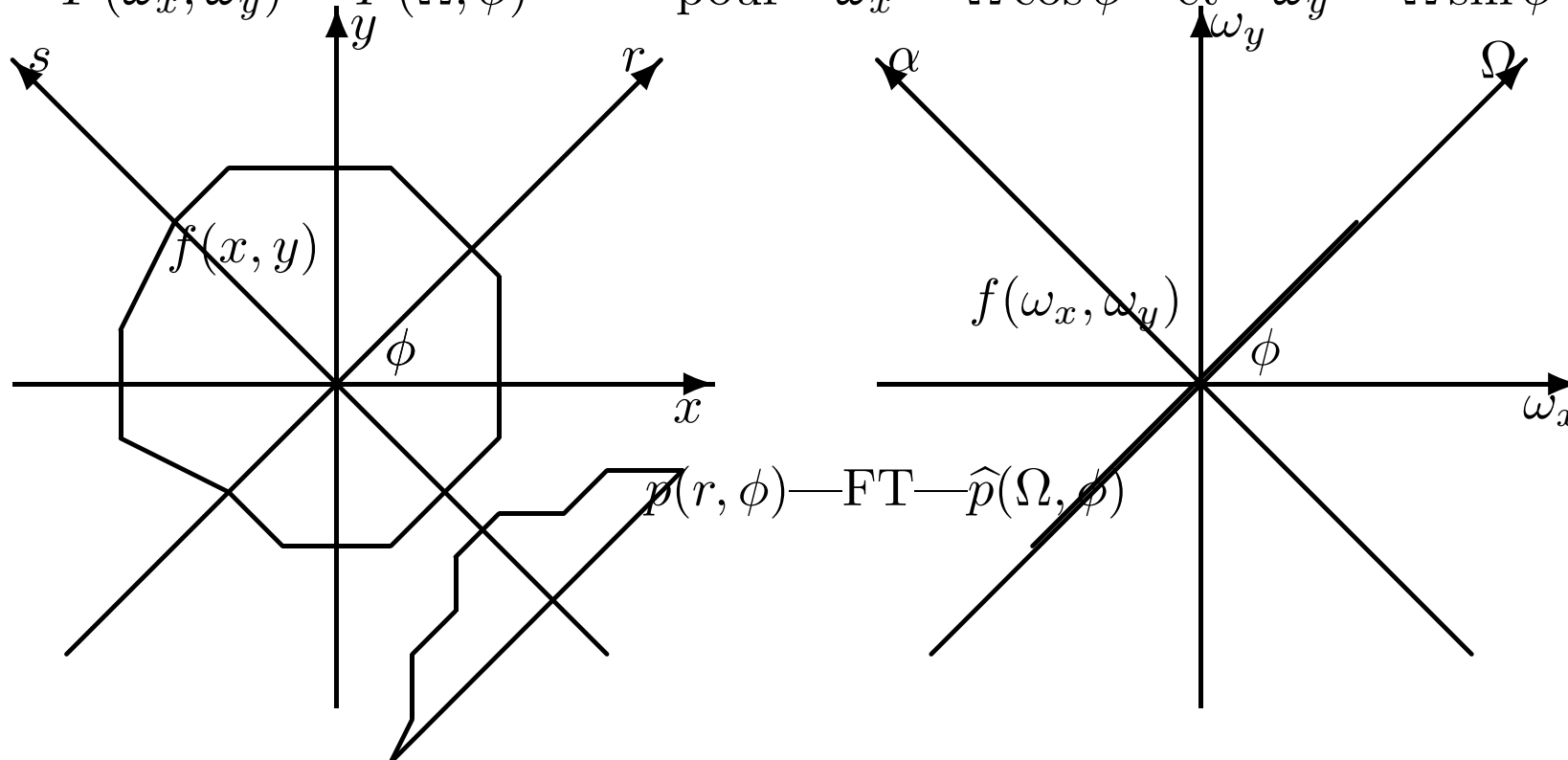


## SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE X

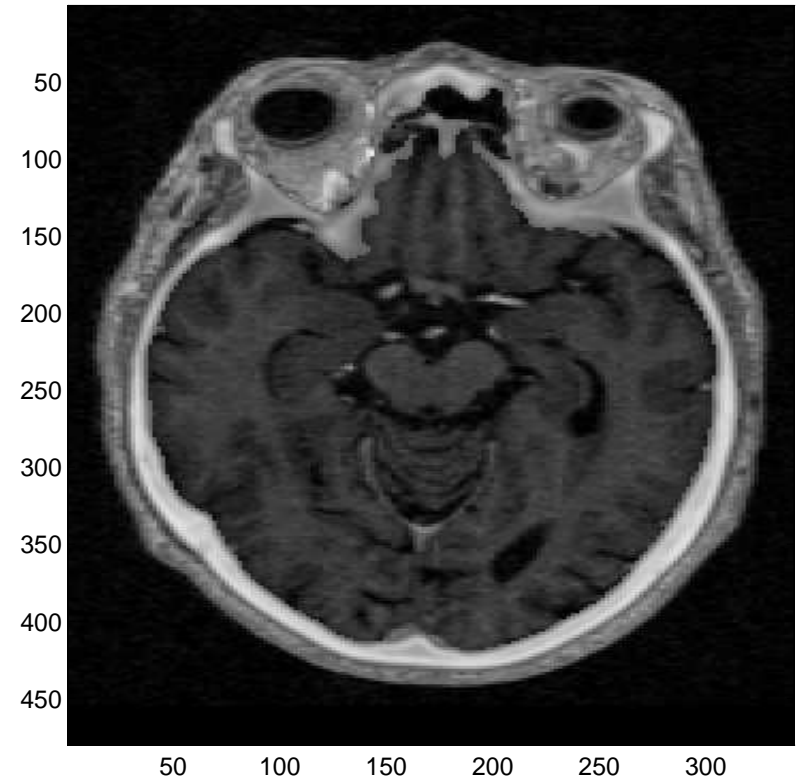
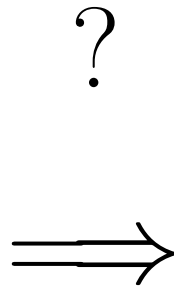
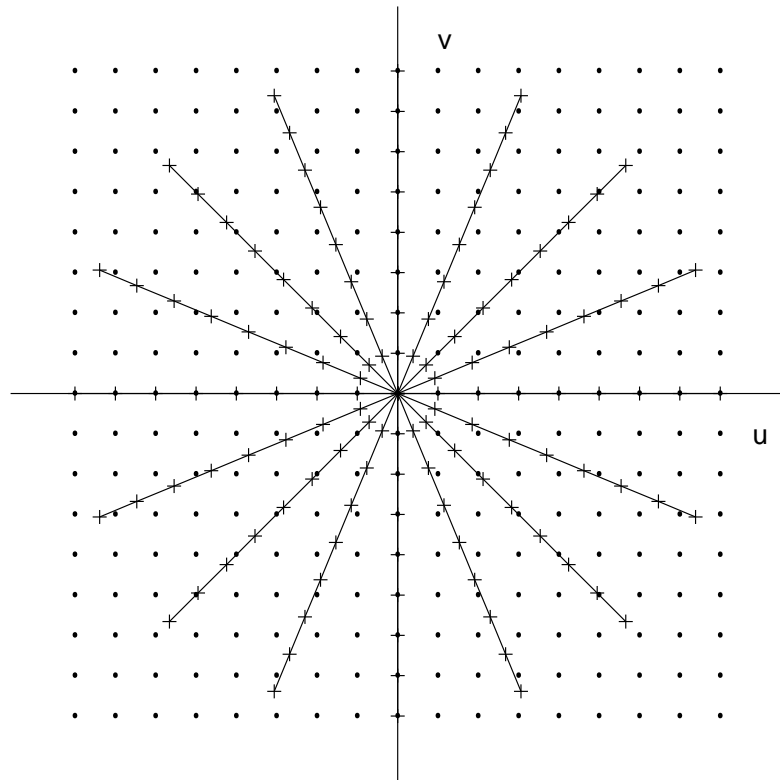
$$P(\Omega, \phi) = \int p(r, \phi) \exp[-j\Omega r] dr$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) \exp[-j\omega_x x, \omega_y y] dx dy$$

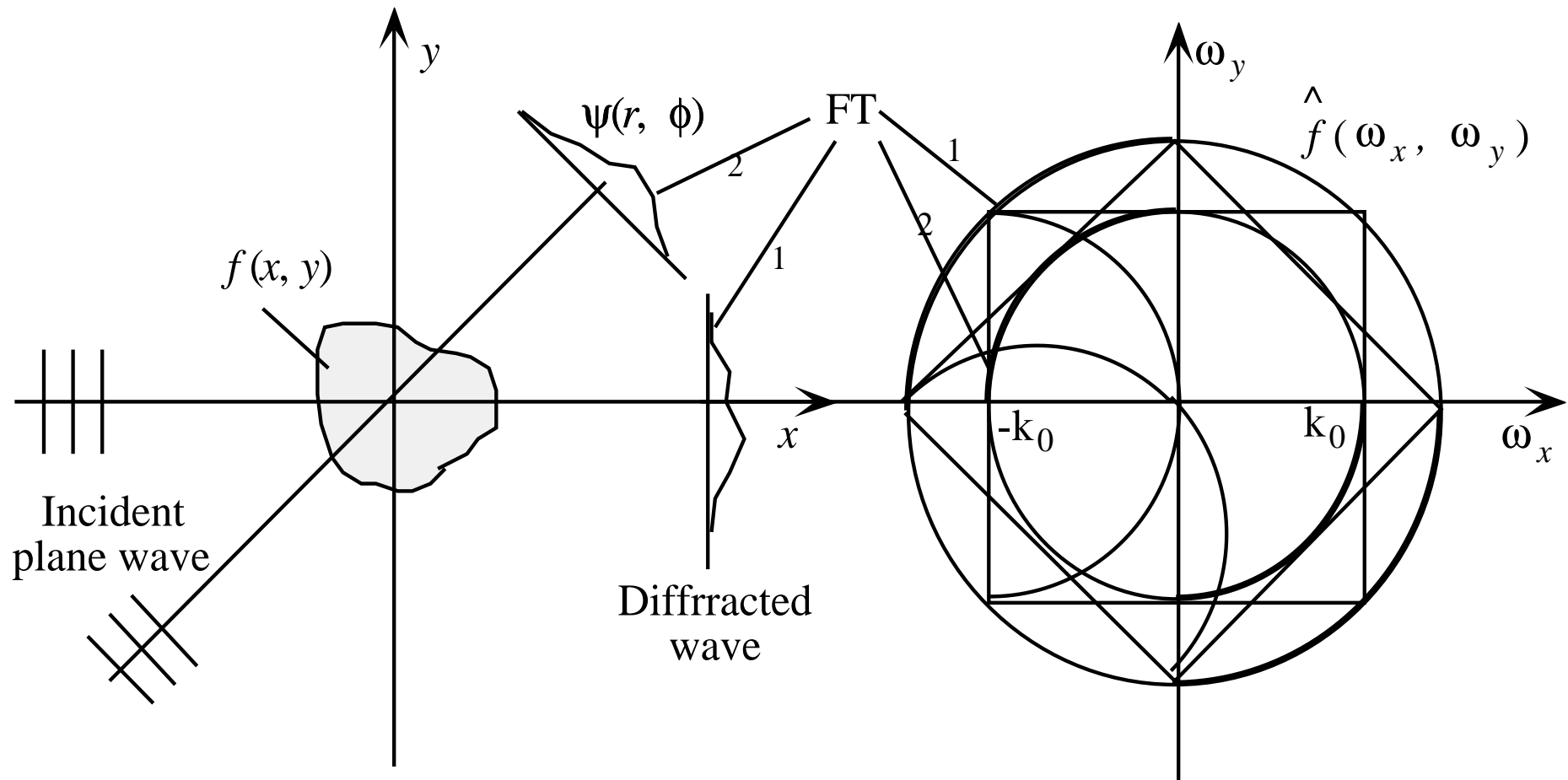
$$F(\omega_x, \omega_y) = P(\Omega, \phi) \quad \text{pour} \quad \omega_x = \Omega \cos \phi \quad \text{et} \quad \omega_y = \Omega \sin \phi$$



# SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE X

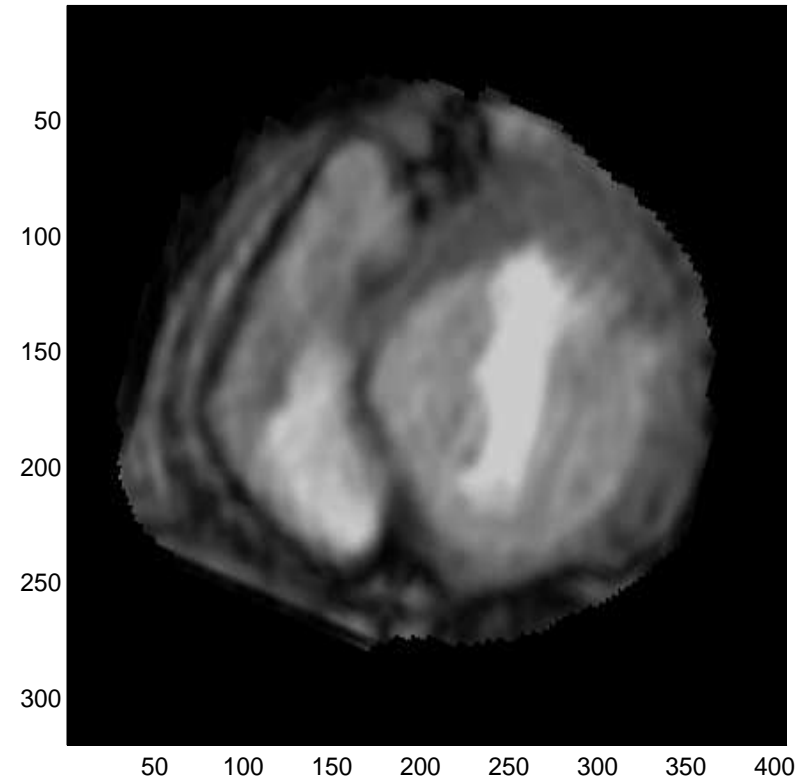
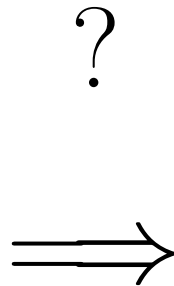
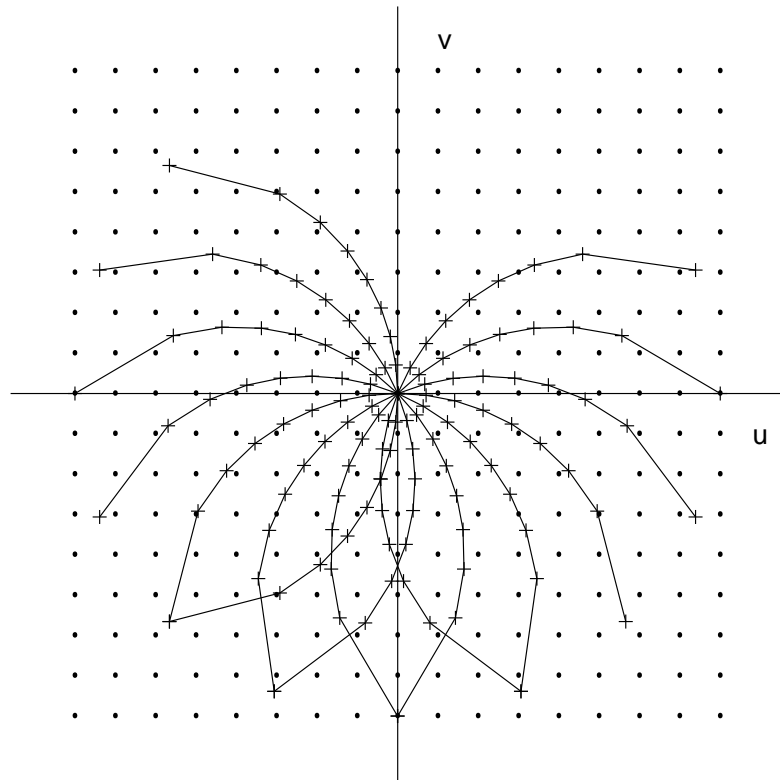


## SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE À ONDES DIFFRACTÈES





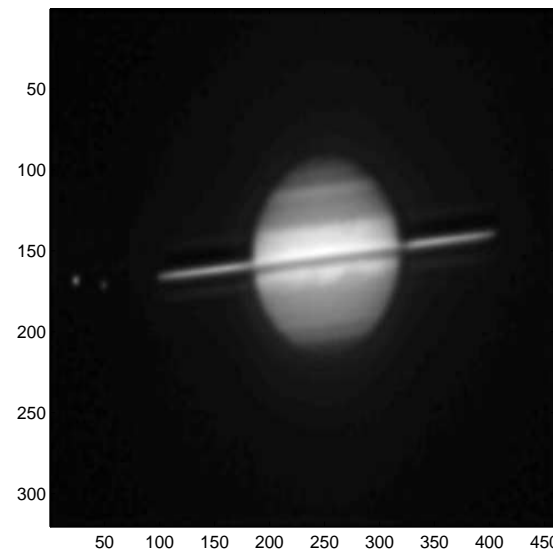
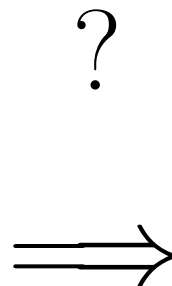
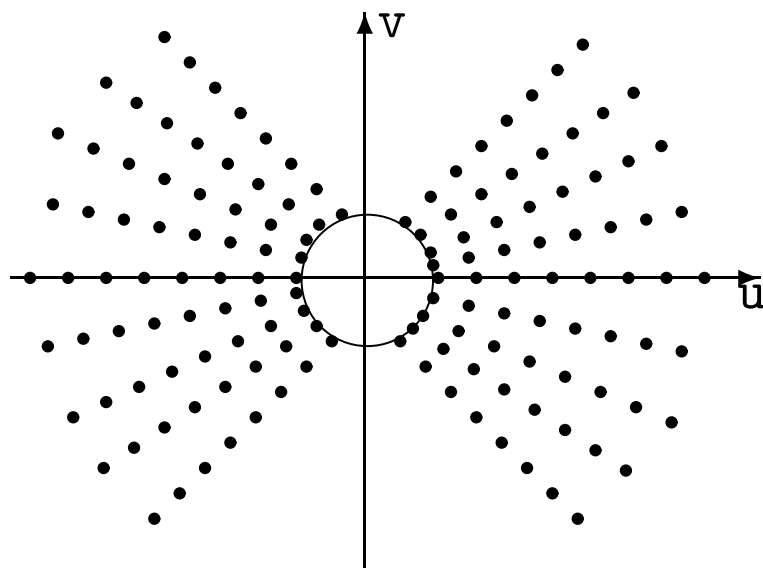
# SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE À ONDES DIFFRACTÈES



## SYNTHÈSE DE FOURIER EN RADIOASTRONOMIE

$$g(u, v) = \iint_D f(x, y) \exp[-j(ux + vy)] dx dy + b(u, v),$$

Données interférométriques:  $|g(u_i, v_i)|^2$



## MÉTHODES D'INVERSION NAÏVES

### Ex1: Déconvolution de signaux

$$y(t) = h(t) * x(t) + b(t)$$

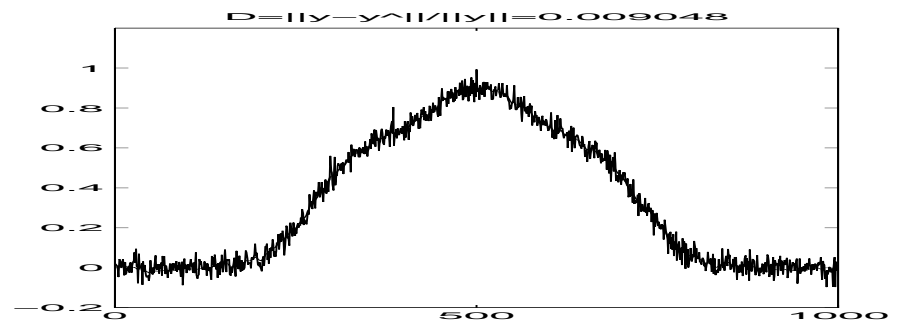
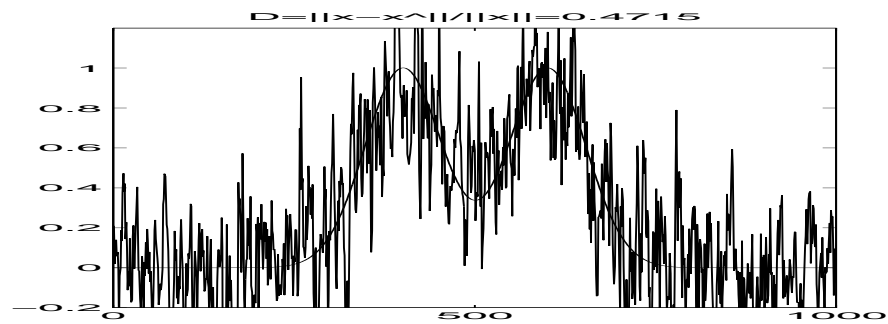
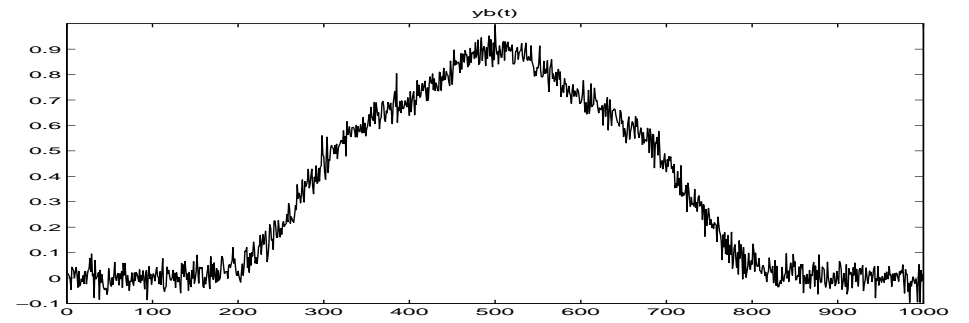
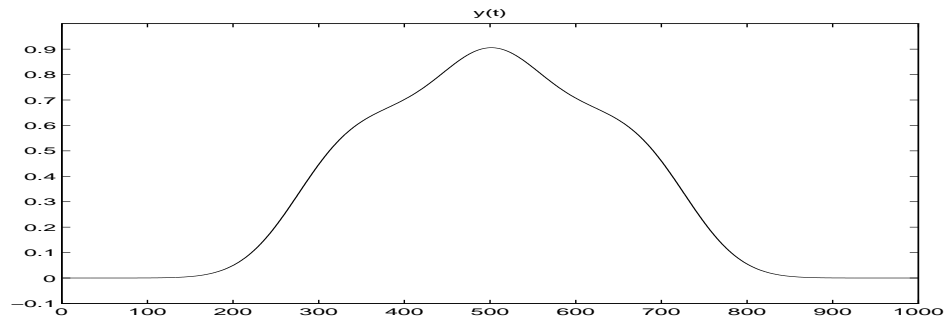
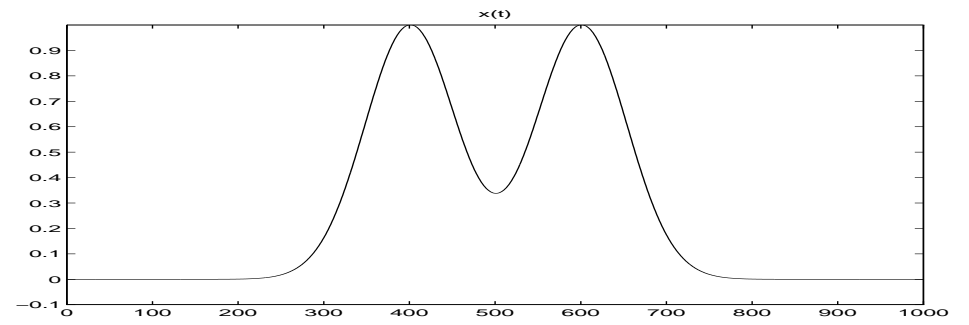
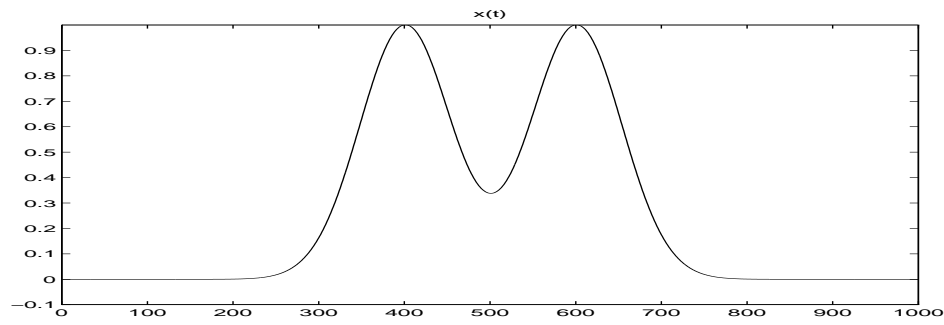
### Filtrage inverse :

$$y(t) = h(t) * x(t) + b(t) \longrightarrow \text{TF} \longrightarrow Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) + B(\omega) \longrightarrow$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} Y(\omega) \longrightarrow \text{TF inverse} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

### Problème : Amplification du bruit

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} Y(\omega) + \frac{B(\omega)}{H(\omega)} Y(\omega)$$



## Inversion par moindres carrés :

### Cas continu :

$$g(t) = h(t) * f(t) + b(t)$$

$$J(f) = \|g - h * f\|^2 \longrightarrow \frac{\partial J}{\partial f} = -2h(-t) * [g(t) - h(t) * f(t)] = 0$$

$$[h(-t) * h(t)] * f(t) = h(-t) * g(t)$$

Passant dans le domaine de FOURIER on obtient :

$$|H(\omega)|^2 F(\omega) = H^*(\omega)G(\omega) \longrightarrow F(\omega) = \frac{H^*(\omega)G(\omega)}{|H(\omega)|^2} = \frac{1}{H(\omega)}G(\omega)$$

### Remarque :

$$J(f) = \|g - h * f\|^2 + \lambda \|d * f\|^2 \longrightarrow$$

$$F(\omega) = \frac{H^*(\omega)G(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \lambda |D(\omega)|^2} = \frac{1}{H(\omega)} \frac{|H(\omega)|^2}{|H(\omega)|^2 + \lambda |D(\omega)|^2} G(\omega)$$

## Discrétisation et inversion directe:

$$g(t) = h(t) * f(t) + b(t) = \int h(t') f(t - t') dt' + b(t)$$

$$g(m) = \sum_{k=-q}^p h(k) f(m - k) + b(m), \quad m = 0, \dots, M$$

ou sous forme matricielle :  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(p) & \cdots & h(0) & \cdots & h(-q) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h(p) & \cdots & h(0) & \cdots & h(-q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(-p) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(M) \\ f(M+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(M+q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b(M) \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{b}$$

- Filtre adapté ou rétroprojection :  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^t \mathbf{g}$  mais  $\mathbf{H}^t \mathbf{H} \neq \mathbf{I}$
- Inversion directe :  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}$
- Inversion au sens des MC :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 \} \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{H}^t \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{g}$$

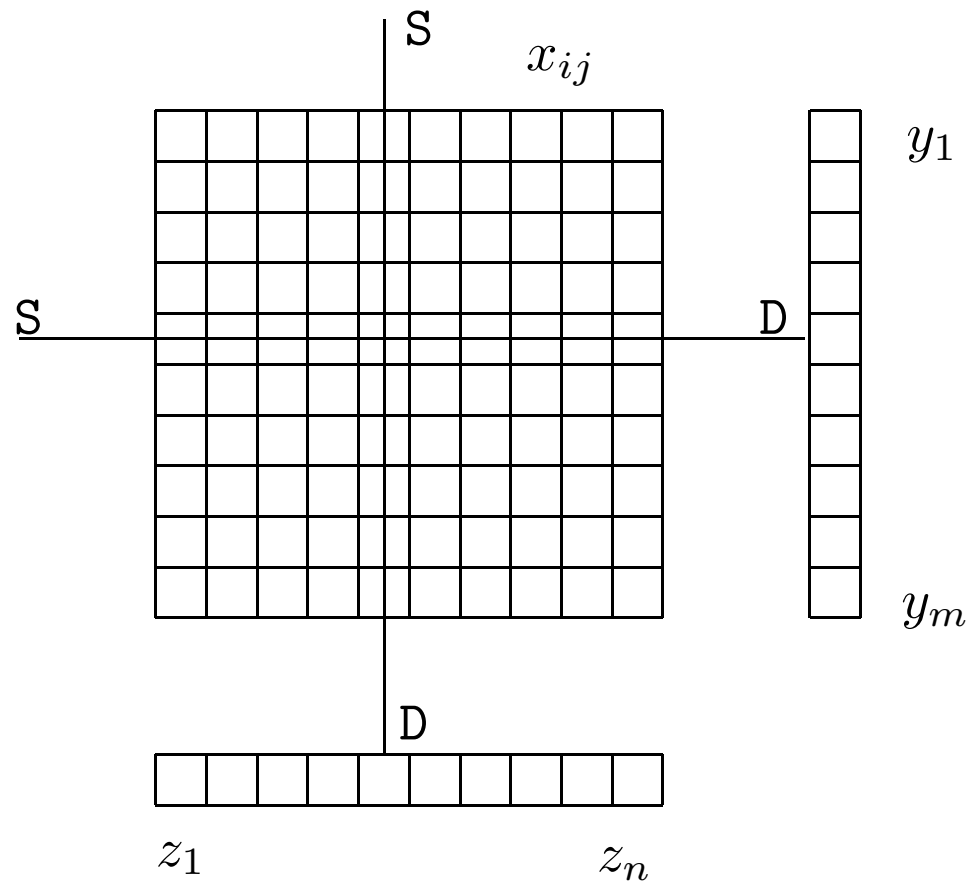
- Inversion avec contrainte de norme minimale :

$$\min \|\mathbf{f}\|^2 \text{ sous les contraintes } \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^t [\mathbf{H}\mathbf{H}^t]^{-1} \mathbf{g}$$



## MÉTHODES D'INVERSION NAÏVES

### Ex2: Problème de la reconstruction d'image en tomographie

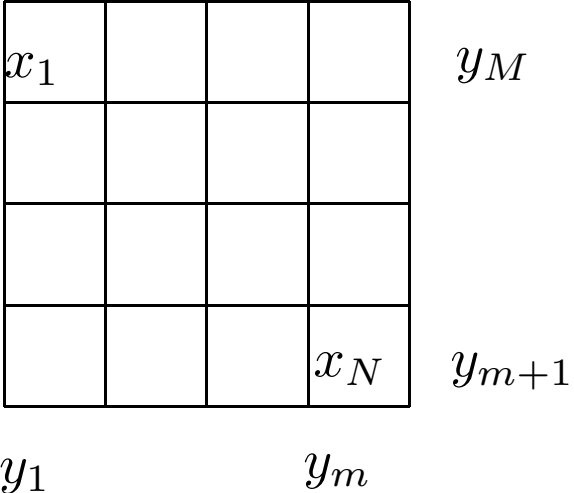


$y_i$  projection verticale

$z_j$  projection horizontale

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = y_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = z_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000100010001000 \\ 0100010001000100 \\ 0010001000100010 \\ 0001000100010001 \\ 0000000000001111 \\ 0000000011110000 \\ 0000111100000000 \\ 1111000000000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{16} \end{pmatrix}$$


$$y = Ax$$

- Problème direct: Étant donné  $x$  calculer  $y$
- Problème inverse: Étant donné  $y$  déterminer ou estimer  $x$ 
  - Existence de la solution
  - Unicité de la solution
  - Stabilité de la solution (sensibilité vis-à-vis des perturbations)

### Existence et Unicité :

				40
		?		40
		.		40
				40
40	40	40	40	

10	10	10	10	40
10	10	10	10	40
10	10	10	10	40
10	10	10	10	40
40	40	40	40	

40	0	0	0	40
0	40	0	0	40
0	0	40	0	40
0	0	0	40	40
40	40	40	40	

15	5	5	15	40
5	15	15	5	40
5	15	15	5	40
15	5	5	15	40
40	40	40	40	

20	0	0	20	40
0	20	20	0	40
0	20	20	0	40
20	0	0	20	40
40	40	40	40	

20	10	5	5	40
10	20	5	5	40
5	5	20	10	40
5	5	10	20	40
40	40	40	40	

**Stabilité :**

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + \delta x_1 \\ x_2 + \delta x_2 \\ x_3 + \delta x_3 \\ x_4 + \delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{1}{300} \longrightarrow \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{10}{1}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \text{cond}(A) \frac{\|\delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}$$

$$\lambda = \{30.3, 3.86, .84, 0.01\}$$

$$\longrightarrow \text{cond}(A) = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} = \frac{30.3}{0.01} \sim 3000$$

Sensibilité aux erreurs sur les paramètres du modèle :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 99.98 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

## CLASSIFICATION DES MÉTHODES D'INVERSION

### MÉTHODES ANALYTIQUES

On se place dans le cadre de mesures continues et en utilisant la notion d'opérateur adjoint on cherche une solution analytique qui est ensuite approximée lors du calcul numérique

$$y(\mathbf{r}_i) = \int h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') x(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + b(\mathbf{r}_i)$$

$$x(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) y(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \simeq \sum_i w_i y(\mathbf{r}_i) g(\mathbf{r}', \mathbf{r}_i)$$

- Inversion directe
- Inversion dans l'espace dual
- Inversion par décomposition tronquée sur une base

## EXEMPLE: RECONSTRUCTION D'IMAGE ET LA TRANSFORMÉE DE RADON

$$p(r, \phi) = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$

**Inversion directe :**

$$f(x, y) = \left( -\frac{1}{2\pi^2} \right) \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial r} p(r, \phi)}{(r - x \cos \phi - y \sin \phi)} dr d\phi$$

**Inversion dans le domaine de Fourier :**

$$F(\omega_x, \omega_y) = P(\Omega, \phi), \quad \omega_x = \Omega \cos \phi, \omega_y = \Omega \sin \phi$$

**Limitations :**

- Méthodes limitées aux cas de modèles simples
- Bruit non pris en compte
- Nécessite un ensemble complet de données non bruitées

## MÉTHODES ALGÈBRIQUES DÉTERMINISTES

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

- Rétrojection ou filtre adapté :  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^t \mathbf{y}$ , mais  $\mathbf{A}^t \mathbf{A} \neq \mathbf{I}$
- Inversion directe lorsque possible:  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$
- Inverse généralisée:
  - $M > N$  et  $\text{rang}\{A\} = N \longrightarrow \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}$
  - $M < N$  et  $\text{rang}\{A\} = M \longrightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{y}$
  - Décomposition en valeurs singulières :  $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{y} \rangle}{\lambda_k} \mathbf{v}_k$
- Restriction de l'espace des solutions :

min  $f(\mathbf{x})$  s.c.  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , avec, par exemple

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad f(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^n x_j \log x_j, \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \log x_j, \quad \dots$$



## MÉTHODES PROBABILISTES

On se place dans le cadre de l'estimation :

- Maximum de vraisemblance (MV)
- Maximum d'entropie (ME)
- Maximum d'entropie sur la moyenne (MEM)
- Estimation bayésienne (EB)

**Avantages :**

- Prise en compte de la nature du bruit
- Prise en compte d'information *a priori* sur la solution
- Cadre cohérent permettant aussi la détermination des hyperparamètres

**Limitations :** Mise en œuvre plus difficile en pratique

S

## MÉTHODES D'INVERSION ALGÈBRIQUE

### Ingrédients de base :

- Un modèle directe :  $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \epsilon$
- Une mesure d'adéquation aux données :  $Q(\mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{x}))$
- Une paramétrisation  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})$  ou une fonctionnelle de régularisation  $\Omega(\mathbf{x})$

### Méthodes d'inversion standard :

- Estimation paramétrique :  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \{Q(\mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}))) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}))\|^2\}$
- Optimisation sous contraintes :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{\Omega(\mathbf{x})\} \quad \text{sous contrainte } \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad Q(\mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{x})) < \epsilon$$

- Critère régularisé :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{Q(\mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{x})) + \lambda\Omega(\mathbf{x})\}$$

titrer Approche estimation bayésienne

**Ingrédients de base :** Modèle directe  $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \epsilon$

- Mesure d'adéquation aux données :  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = p_{\epsilon}(\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))$
- Information *a priori*  $p(\mathbf{x})$
- Règle de Bayes :  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x})$
- Choix d'un estimateur basé sur  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$

**Lien avec régularisation :**

- Estimation au sens du maximum *a posteriori* (MAP) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{ \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \ln p(\mathbf{x}) \}$$

avec  $Q(\mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  et  $\lambda\Omega(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x})$

- Modèle pixels indépendants :

$$p(\mathbf{x}) = \prod_j p_j(x_j) \longrightarrow \text{Energie séparable } \Omega(\mathbf{x}) = \sum_j \Omega_j(x_j)$$

- Modèle markovien :

$$p(x_j|x_{k,k \neq j}) = p(x_j|x_{k,k \in v(j)}) \longrightarrow \text{Gibbs } \Omega(\mathbf{x}) = \sum_j \Omega_j(x_j - \Omega(x_{k,k \in v(j)}))$$

## Estimation au sens du MAP ou régularisation:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{J(\mathbf{x})\} \quad \text{avec} \quad J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x})\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{x})$$

- Lois gaussiennes:  $\Omega(\mathbf{x})$  quadratique  
 $\longrightarrow J(\mathbf{x})$  quadratique  $\longrightarrow \hat{\mathbf{x}}$  fonction linéaire de  $\mathbf{y}$   $\longrightarrow$  Algorithmes rapides

- Lois non gaussiennes mais  $\Omega(\mathbf{x})$  convexe:

Exemples:  $\Omega(\mathbf{x}) = \sum_j \phi(x_j)$  ou  $\Omega(\mathbf{x}) = \sum_j \phi(x_j - x_{j-1})$

avec  $\phi(t) = \{|t|^p, (|t| \ln |t| - |t|), (\ln(1 + |t|))\}$

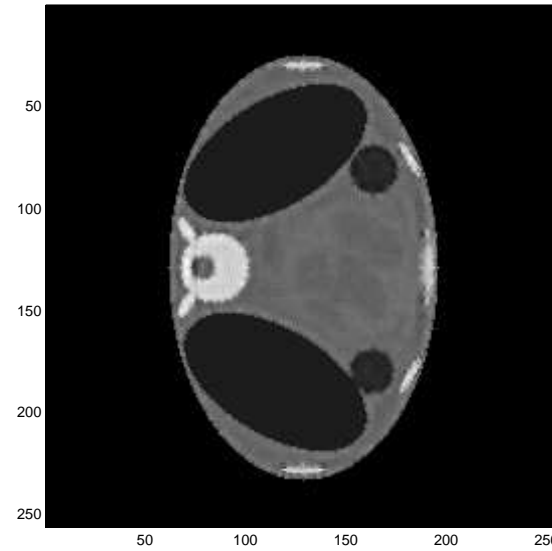
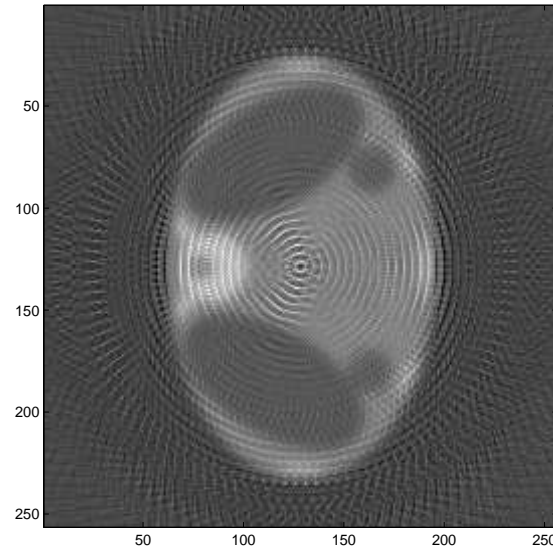
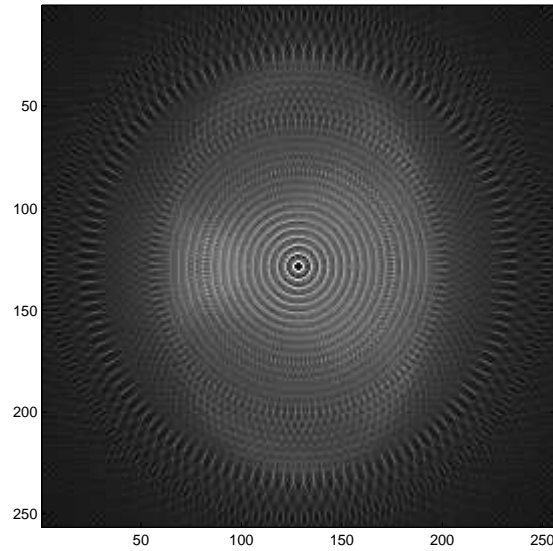
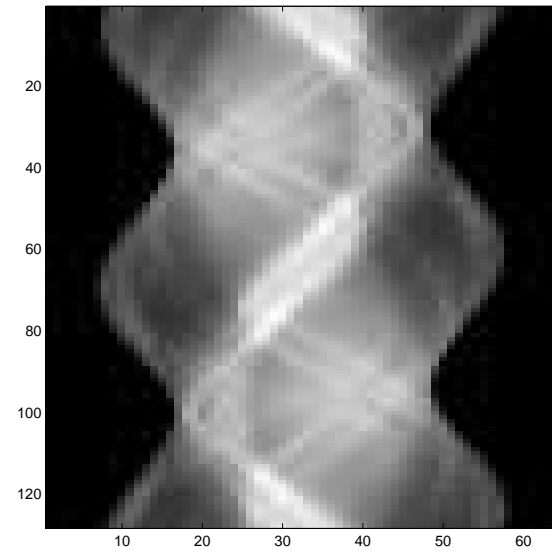
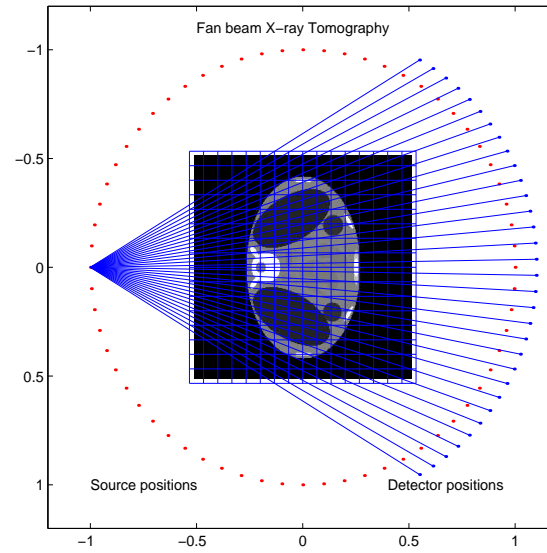
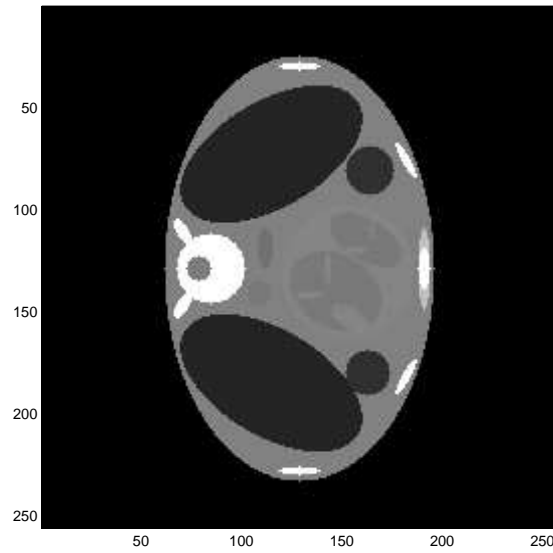
$\longrightarrow J(\mathbf{x})$  convexe  $\longrightarrow$  Estimation nonlinéaire mais facile à calculer

- Lois non gaussiennes et  $\Omega(\mathbf{x})$  non convexe:

Exemples:

$$\Omega(t) = \begin{cases} |t|^2 & \text{if } |t| < \alpha, \\ \alpha^2 & \text{else,} \end{cases}, \begin{cases} t^2 & \text{if } |t| < \alpha, \\ 2\alpha t - \alpha^2 & \text{else,} \end{cases}, \frac{\alpha^2 t^2}{1+t^2}, \log \cosh(t/\alpha)$$

$\longrightarrow J(\mathbf{x})$  non convexe  $\longrightarrow$  Minima locaux  $\longrightarrow$  Optimisation globale



## CONCLUSION

- Lorsqu'on a des mesures et un modèle les liant aux inconnus, on se trouve devant un problème inverse.
- Un grand nombre de problèmes de restauration et de reconstruction des signaux et des images se formalisent comme des problèmes inverses linéaires.
- Problèmes inverses sont souvent problèmes mal-posés.
- Les méthodes "allant de soi" ne donne que rarement satisfaction.