

Entropie en Traitement du Signal

Entropy in Signal Processing

Ali Mohammad-Djafari
Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-SUPÉLEC-UPS)
SUPÉLEC
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Résumé

Le principal objet de cette communication est de faire une rétro perspective succincte de l'utilisation de l'entropie et du principe du maximum d'entropie dans le domaine du traitement du signal. Après un bref rappel de quelques définitions et du principe du maximum d'entropie, nous verrons successivement comment l'entropie est utilisée en séparation de sources, en modélisation de signaux, en analyse spectrale et pour la résolution des problèmes inverses linéaires.

Mots clés : Entropie, Entropie croisée, Distance de Kullback, Information mutuelle, Estimation spectrale, Problèmes inverses

Abstract

The main object of this work is to give a brief overview of the different ways the entropy has been used in signal and image processing. After a short introduction of different quantities related to the entropy and the maximum entropy principle, we will study their use in different fields of signal processing such as: source separation, model order selection, spectral estimation and, finally, general linear inverse problems.

Keywords : Entropy, Relative entropy, Kullback distance, Mutual information, Spectral estimation, Inverse problems

1 Introduction

En 1945, Shannon [1] a introduit la notion de l'entropie associée à une source qui est modélisée par une variable aléatoire discrète X , comme la moyenne de la quantité d'information apportée par les réalisations de cette variable. Depuis cette date, cette notion a eu un très grand usage dans le domaine du traitement de l'information et particulièrement en codage et compression des données en télécommunications.

En 1957, Jaynes [2, 3, 4] a introduit le principe du maximum d'entropie pour l'attribution d'une loi de probabilité à une variable aléatoire lorsque la connaissance sur cette variable est incomplète.

En 1959, Kullback [5] a introduit une mesure de l'information relative (entropie relative) d'une loi de probabilité par rapport à une autre. Cette mesure a aussi été considérée comme une mesure de distance entre ces deux lois.

Depuis, ces notions ont eu une influence importante et un usage étendu dans divers domaines du traitement de l'information, de l'inférence en général, mais aussi du traitement du signal et des images.

Le principal objet de ce travail est de fournir une vue synthétique et brève des principaux usages de ces notions en traitement du signal. Après un rappel de quelques définitions, des relations importantes entre les différentes quantités et l'exposé du principe du maximum d'entropie, nous verrons successivement comment l'entropie est utilisée en séparation de sources, en modélisation de signaux, en analyse spectrale et pour la résolution des problèmes inverses linéaires.

1.1 Rappels et définitions

L'entropie associée à une variable aléatoire scalaire discrète X avec des réalisations $\{x_1, \dots, x_N\}$ et la distribution de probabilités $\{p_1, \dots, p_N\}$ mesure son désordre. Elle est définie par

$$H[X] = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (1)$$

Avec quelques précautions, cette définition peut être étendue au cas d'une variable aléatoire continue X avec une densité de probabilité $p(x)$ par

$$H[X] = - \int p(x) \ln p(x) dx. \quad (2)$$

Par extension, si on considère un couple de variables aléatoires (X, Θ) avec des lois $p(x)$, $p(\theta)$, $p(\theta|x)$, $p(x|\theta)$ et $p(x, \theta)$, on peut définir les entropies respectivement associées :

– Entropie de Θ :

$$H[\Theta] = - \int p(\theta) \ln p(\theta) d\theta \quad (3)$$

– Entropie de Θ conditionnellement à $X = x$:

$$H[\Theta|x] = - \int p(\theta|x) \ln p(\theta|x) d\theta \quad (4)$$

– Entropie de X conditionnellement à $\Theta = \theta$:

$$H[X|\theta] = - \int p(x|\theta) \ln p(x|\theta) dx \quad (5)$$

– Entropie de (X, Θ) :

$$H[X, \Theta] = - \iint p(x, \theta) \ln p(x, \theta) dx d\theta. \quad (6)$$

Avec ces définitions on définit aussi les quantités suivantes :

– Différence entropique de p_1 et p_2 :

$$\delta H [p_1, p_2] = H [p_1] - H [p_2] \quad (7)$$

– Entropie relative de p_1 par rapport à p_2 :

$$D [p_1 : p_2] = - \int p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \quad (8)$$

– Distance de Kullback de p_1 par rapport à p_2 :

$$K [p_1 : p_2] = -D [p_1 : p_2] = \int p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \quad (9)$$

– Information mutuelle entre Θ et X :

$$I[\Theta, X] = E_X \{ \delta H [p(\theta), p(\theta|x)] \} = E_\Theta \{ \delta H [p(x), p(x|\theta)] \} \quad (10)$$

$$= H[X] - H[X|\Theta] = H[\Theta] - H[\Theta|X] \quad (11)$$

où

$$H[\Theta|X] = E_X \{ H[\Theta|x] \} = \int H[\Theta|x] p(x) dx \quad (12)$$

$$H[X|\Theta] = E_\Theta \{ H[X|\theta] \} = \int H[X|\theta] p(\theta) d\theta \quad (13)$$

avec les relations suivantes entre ces différentes quantités :

$$H[X, \Theta] = H[X] + H[\Theta|X] = H[\Theta] + H[X|\Theta] = H[X] + H[\Theta] - I[\Theta, X] \quad (14)$$

$$I[\Theta, X] = D [p(x, \theta) : p(x)p(\theta)] = E_X \{ D [p(\theta|x) : p(\theta)] \} = E_\Theta \{ D [p(x|\theta) : p(x)] \}. \quad (15)$$

On peut aussi remarquer les propriétés suivantes :

- L'information mutuelle $I[\Theta, X]$ est une fonction concave de $p(\theta)$ pour $p(x|\theta)$ fixée et une fonction convexe de $p(x|\theta)$ pour $p(\theta)$ fixée, et on a $I[\Theta, X] \geq 0$ avec égalité si X et Θ sont indépendantes. Cette propriété est utilisée en communication pour définir la capacité d'un canal lorsque X est transmis et Θ est reçu :

$$C = \arg \max_{p(\theta)} \{I[\Theta, X]\} \quad (16)$$

- L'entropie relative $D[p_1 : p_2]$ est invariante par changement d'échelle mais n'est pas symétrique. C'est pourquoi on introduit

$$J[p_1, p_2] = D[p_1 : p_2] + D[p_2 : p_1], \quad (17)$$

qui est symétrique et invariante par changement d'échelle, comme une mesure de divergence entre $p_1(x)$ et $p_2(x)$.

- La puissance entropique (PE) d'une loi $p(x)$ est définie comme la variance d'une loi gaussienne ayant la même entropie. En notant que l'entropie d'une loi gaussienne est $\frac{1}{2} \ln(2\pi e\sigma^2)$, on obtient

$$\text{PE}[p] = \exp \left[2 \left[H[p] - \frac{1}{2} \ln(2\pi e) \right] \right] = \exp [2 \delta H [p, \mathcal{N}(0,1)]] . \quad (18)$$

PE $[p]$ est une mesure de proximité de p à une densité gaussienne réduite.

1.2 Lien entre entropie et vraisemblance

Considérons le problème de l'estimation des paramètres θ d'une loi de probabilité $p(x|\theta)$ à partir d'un n -échantillon $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. La log-vraisemblance de θ est définie par

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i|\theta). \quad (19)$$

Maximiser $L(\theta)$ par rapport à θ donne l'estimation au sens du maximum de vraisemblance (MV). Notons que $L(\theta)$ dépend de n , c'est pourquoi on peut s'intéresser à $\frac{1}{n}L(\theta)$ et définir

$$\bar{L}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} L(\theta) = E \{ \ln p(x|\theta) \} = \int p(x|\theta^*) \ln p(x|\theta) dx, \quad (20)$$

où θ^* est le présumé "vrai" vecteur des paramètres et $p(x|\theta^*)$ la loi de probabilité correspondante. On peut alors noter que

$$D[p(x|\theta^*) : p(x|\theta)] = - \int p(x|\theta^*) \ln \frac{p(x|\theta)}{p(x|\theta^*)} dx = \int p(x|\theta^*) \ln p(x|\theta^*) dx + \bar{L}(\theta) \quad (21)$$

et que

$$\arg \max_{\theta} \{D[p(x|\theta^*) : p(x|\theta)]\} = \arg \max_{\theta} \{\bar{L}(\theta)\} .$$

1.3 Lien entre entropie et la matrice d'information de Fisher

On considère $D[p(x|\theta^*) : p(x|\theta^* + \Delta\theta)]$ et suppose que $\ln p(x|\theta)$ est développable en série de Taylor. En ne gardant que les termes jusqu'à l'ordre deux, on obtient

$$D[p(x|\theta^*) : p(x|\theta^* + \Delta\theta)] \simeq \frac{1}{2} \Delta\theta^t \mathbf{F} \Delta\theta. \quad (22)$$

où \mathbf{F} est la matrice d'information de Fisher :

$$\mathbf{F} = E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^t \partial \theta} \ln p(x|\theta) \Big|_{\theta=\theta^*} \right\}. \quad (23)$$

1.4 Cas d'un vecteur ou d'un processus aléatoire

Toutes ces définitions sont facilement étendues au cas d'un vecteur aléatoire ou d'un processus aléatoire stationnaire. Par exemple, il est facile de montrer que l'entropie d'un vecteur aléatoire de dimension n avec une densité gaussienne $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ est

$$H = \frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(|\det(\mathbf{R})|) \quad (24)$$

et que l'entropie relative entre deux lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ et $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{S})$ est

$$D = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}) - \log \frac{|\det(\mathbf{R})|}{|\det(\mathbf{S})|} - n \right). \quad (25)$$

De même, on montre que pour un processus aléatoire stationnaire et gaussien dont la matrice de covariance est Toeplitz, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln S(\omega) d\omega \quad (26)$$

où $S(\omega)$ est sa densité spectrale de puissance (dsp), et pour deux processus stationnaires et gaussiens de densités spectrales de puissance $S_1(\omega)$ et $S_2(\omega)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D(p_1 : p_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} - \ln \frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} - 1 \right) d\omega \quad (27)$$

et on retrouve la distance de Itakura-Saito [6, 7, 8] en analyse spectrale.

1.5 Principe du maximum d'entropie (PME)

Lorsqu'on doit attribuer une loi de probabilité à une variable X sur laquelle on a une information partielle, il est préférable de choisir la loi d'entropie maximale parmi toutes les lois compatibles avec cette information. La loi ainsi choisie est la moins compromettante au sens qu'elle ne contient que l'information disponible (elle n'introduit pas d'information supplémentaire).

En termes mathématiques, considérons la variable X et supposons que l'information disponible sur X s'écrit

$$\mathbb{E} \{ \phi_k(X) \} = d_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (28)$$

où ϕ_k sont des fonctions quelconques. Évidemment, il existe une infinité de lois $p(x)$ qui satisfont ces contraintes. Alors le PME s'écrit

$$\hat{p}(x) = \arg \max_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \mathbb{H}[p] = - \int p(x) \ln p(x) dx \right\} \quad (29)$$

où

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) : \int \phi_k(x) p(x) dx = d_k, \quad k = 0, \dots, K \right\}$$

avec $\phi_0 = 1$ et $d_0 = 1$ pour la contrainte de normalisation.

Sachant que $\mathbb{H}[p]$ est une fonction concave de p et que les contraintes (28) sont linéaires en p , la solution s'écrit

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\lambda})} \exp \left[- \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(x) \right] \quad (30)$$

où $Z(\boldsymbol{\lambda})$ est la fonction de partition $Z(\boldsymbol{\lambda}) = \int \exp[-\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(x)] dx$ et $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_K]^t$ vérifie

$$\frac{1}{Z(\boldsymbol{\lambda})} \int \phi_k(x) \exp \left[- \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(x) \right] = d_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (31)$$

La valeur maximale de l'entropie est

$$H_{\max} = \ln Z(\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y}. \quad (32)$$

Le problème d'optimisation (29) s'étend facilement en remplaçant l'entropie $H(p)$ par l'entropie relative $D[p : q]$ où $q(x)$ est une loi *a priori*. Pour plus de développements sur ce sujet on peut se référer à [9, 5, 10, 11] et à [12, 13, 14, 15].

2 Entropie en séparation de sources

Le modèle le plus simple en séparation de sources est $\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{s}$ où, \mathbf{s} est le vecteur sources, \mathbf{x} est le vecteur des mesures et \mathbf{A} est la matrice du mélange, supposée inversible en général. Le problème est souvent posé comme celui de l'estimation d'une matrice de séparation $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ ou $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{A}^{-1}$. $\boldsymbol{\Sigma}$ est une matrice de permutation d'indices et $\boldsymbol{\Lambda}$ une matrice diagonale, de telle sorte que les composantes du vecteur $\mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{x}$ soient indépendantes. La notion d'entropie est utilisée à ce niveau comme un outil pour assurer cette indépendance. D'une manière plus générale, considérons un traitement de la forme $y_i = g([\mathbf{B} \mathbf{x}]_i)$ où g est une fonction monotone et croissante. On a alors

$$p_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}|} p_X(\mathbf{x}) \longrightarrow H(\mathbf{y}) = -E \{ \ln p_Y(\mathbf{y}) \} = E \{ \ln |\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}| \} - H(\mathbf{x}). \quad (33)$$

$H(\mathbf{y})$ est utilisée comme une mesure de l'indépendance des composantes du vecteur \mathbf{y} et on estime alors la matrice de séparation \mathbf{B} en maximisant $H(\mathbf{y})$ par rapport aux éléments de cette matrice. À titre de comparaison, on note que l'estimation de \mathbf{B} au sens du maximum de vraisemblance s'obtient en maximisant

$$V(\mathbf{B}) = \sum_i \ln p_i([\mathbf{B} \mathbf{x}]_i) - \log |\det(\mathbf{B})| \quad (34)$$

lorsque les sources s_i sont supposées indépendantes avec $p_i(s_i)$ connues.

3 Entropie en modélisation de signaux

L'identification de l'ordre d'un modèle en traitement du signal est un sujet primordial et encore ouvert. Lorsque l'ordre du modèle (dimension du vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta}$) est fixé, l'estimation d'une valeur optimale (au sens du maximum de vraisemblance, du maximum *a posteriori* (MAP) ou d'autres estimateurs bayésiens) est bien établie, mais la détermination de l'ordre du modèle est encore matière à discussion. Parmi les outils utilisés, on peut mentionner l'entropie, ou plus exactement $D[p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}^*) : p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})]$, où $\boldsymbol{\theta}^*$ représente le vrai vecteur des paramètres de dimension k^* et $\boldsymbol{\theta}$ le vecteur estimé de dimension $k \leq k^*$. Le fameux critère d'Akaike [16, 17, 18, 19, 20] utilise ainsi cette quantité pour déterminer l'ordre optimal du modèle dans le cadre spécifique des modèles linéaires (en les paramètres), des lois gaussiennes et de l'estimation au sens du MV [21].

4 Entropie en analyse spectrale

L'entropie est utilisée de multiples façons en analyse spectrale. La présentation classique de Burg [22] se résume ainsi :

Soit $X(n)$ un processus aléatoire centré et stationnaire, dont nous disposons d'un nombre fini d'échantillons de la fonction d'autocorrélation

$$r(k) = E \{ X(n)X(n+k) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \exp[jk\omega] d\omega, \quad k = 0, \dots, K. \quad (35)$$

La question est d'estimer la densité spectrale de puissance

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) \exp[-jk\omega]$$

de ce processus. Considérons maintenant le problème de l'attribution d'une loi de probabilité $p(\mathbf{x})$ au vecteur $\underline{X} = [X(0), \dots, X(N-1)]^t$. Utilisant le PME et en remarquant que les contraintes (35) sont quadratiques en \underline{X} , on obtient une loi gaussienne pour \underline{X} . Pour un processus centré, stationnaire et gaussien, lorsque le nombre d'échantillons $N \rightarrow \infty$, l'expression de l'entropie devient

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \ln S(\omega) d\omega. \quad (36)$$

On cherche alors à maximiser H sous les contraintes (35). La solution est bien connue :

$$S(\omega) = \frac{1}{\left| \sum_{k=-K}^K \lambda_k \exp[jk\omega] \right|^2}, \quad (37)$$

où $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \dots, \lambda_K]^t$, les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (35), sont ici équivalents aux coefficients d'une modélisation AR du processus $X(n)$. Notons que dans ce cas particulier, il y a une expression analytique pour $\boldsymbol{\lambda}$, ce qui permet de donner une expression analytique directe de $S(\omega)$ en fonction des données $\{r(k), k = 0, \dots, K\}$:

$$S(\omega) = \frac{\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\delta}}{\mathbf{e} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{e}}, \quad (38)$$

où $\boldsymbol{\Gamma} = \text{Toeplitz}(r(0), \dots, r(K))$ est la matrice de corrélation des données et $\boldsymbol{\delta}$ et \mathbf{e} sont deux vecteurs définis par $\boldsymbol{\delta} = [1, 0, \dots, 0]^t$ et $\mathbf{e} = [1, e^{-j\omega}, e^{-j2\omega}, \dots, e^{-jK\omega}]^t$.

Notons que nous avons utilisé le PME pour choisir une loi de probabilité pour le processus $X(n)$. Ainsi la densité spectrale de puissance estimée dans cette approche correspond à la densité spectrale de puissance du processus le plus désordonné (le plus informatif!) qui soit compatible avec les données (35).

Une autre approche consiste à maximiser l'entropie relative $D[p(\mathbf{x}) : p_0(\mathbf{x})]$ ou minimiser la distance de Kullback $K[p(\mathbf{x}) : p_0(\mathbf{x})]$ où $p_0(\mathbf{x})$ est une loi *a priori* sous les mêmes contraintes. Le choix de cette loi est alors primordial. Évidemment, en choisissant $p_0(\mathbf{x})$ uniforme, on retrouve le cas précédent, mais si on choisit une loi gaussienne pour $p_0(\mathbf{x})$, l'expression à maximiser devient

$$D[p(\mathbf{x}) : p_0(\mathbf{x})] = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{S(\omega)}{S_0(\omega)} - \ln \frac{S(\omega)}{S_0(\omega)} - 1 \right) d\omega \quad (39)$$

lorsque $N \mapsto \infty$, et où $S_0(\omega)$ correspond à la densité spectrale de puissance d'un processus de référence avec la loi $p_0(\mathbf{x})$.

Une autre approche consiste à décomposer le processus $X(n)$ sur une base de Fourier $\{\cos k\omega t, \sin k\omega t\}$ et considérer ω comme une variable aléatoire et $S(\omega)$, une fois normalisé, comme une loi de probabilité. On décrit alors le problème de la détermination de $S(\omega)$ comme celui de la maximisation de

$$- \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \ln S(\omega) d\omega \quad (40)$$

sous les contraintes linéaires (35). La solution est de la forme

$$S(\omega) = \exp \left[\sum_{k=-K}^K \lambda_k \exp[jk\omega] \right]. \quad (41)$$

La densité spectrale de puissance estimée dans cette approche correspond à la densité spectrale de puissance la plus uniforme du processus qui est compatible avec les données (35).

Une troisième approche consiste à considérer $S(\omega)$ (à ω fixé) comme la moyenne d'une variable aléatoire $Z(\omega)$ pour laquelle nous supposons disposer d'une loi *a priori* $\mu(z)$. On cherche ensuite la

loi $p(z)$ qui maximise $D(p(z); \mu(z))$ sous les contraintes (35). Une fois $p(z)$ déterminée, on définit la solution par

$$S(\omega) = \mathbb{E} \{Z(\omega)\} = \int Z(\omega)p(z) dz. \quad (42)$$

Il est alors intéressant de voir que l'expression de $S(\omega)$ dépend du choix de la loi a priori $\mu(z)$ (voir paragraphe 5). Lorsqu'on choisit pour $\mu(z)$ une loi gaussienne (sur \mathbf{R}) on obtient

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} S^2(\omega) d\omega, \quad (43)$$

alors que si on choisit une loi de Poisson (sur \mathbf{R}_+), on retrouve l'expression de l'entropie (40). Finalement, si on choisit une mesure de Lebesgue sur $[0, \infty]$, on obtient l'expression de l'entropie (36). Voir aussi : [22, 23, 24, 25, 26, 27, 15].

5 Entropie pour la résolution des problèmes inverses linéaires

Lorsqu'on cherche à résoudre un problème inverse linéaire numériquement, on est rapidement amené à chercher une solution $\hat{\mathbf{x}}$ pour l'équation

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (44)$$

où \mathbf{A} est une matrice de dimensions $(M \times N)$, en général singulière ou très mal conditionnée. Bien que les cas $M > N$ ou $M = N$ aient les mêmes difficultés que le cas $M < N$, nous considérons seulement ce deuxième cas pour plus de clarté. Dans ce cas, à l'évidence, soit le problème n'a pas de solution, soit il en possède une infinité. Nous nous placerons dans ce dernier cas où la question est de choisir une seule solution.

Parmi les différentes méthodes, on peut noter l'utilisation de la norme $\|\mathbf{x}\|^2$ pour ce choix — la solution de norme minimale :

$$\hat{\mathbf{x}}_{NM} = \arg \max_{\{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}} \left\{ \Omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \right\} = \mathbf{A}^t (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{y}. \quad (45)$$

Mais, ce choix permettant d'obtenir une unique solution à ce problème n'est pas le seul possible. En effet, tout critère $\Omega(\mathbf{x})$ qui est convexe en \mathbf{x} peut être utilisé. On peut mentionner en particulier

$$\Omega(\mathbf{x}) = - \sum_j x_j \ln x_j \quad (46)$$

lorsque les x_j sont positifs et lorsque $\sum x_j = 1$, ce qui, par analogie avec la définition de l'entropie, assimile les x_j à une distribution de probabilité $x_j = P(U = u_j)$. La variable aléatoire U peut ou non avoir une réalité physique. $\Omega(\mathbf{x})$ est alors l'entropie associée à cette variable.

Une autre approche consiste à supposer $x_j = \mathbb{E} \{U_j\}$ ou encore $\mathbf{x} = \mathbb{E} \{\mathbf{U}\}$ où \mathbf{U} est un vecteur aléatoire, qui peut ou non avoir une réalité physique. Supposons maintenant que \mathbf{U} admet une loi de probabilité $\hat{p}(\mathbf{u})$ que l'on cherche à déterminer. En notant que les données $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbb{E} \{\mathbf{U}\} = \mathbb{E} \{\mathbf{A}\mathbf{U}\}$ peuvent être considérées comme des contraintes linéaires sur cette loi, on peut utiliser de nouveau l'entropie pour déterminer la loi $\hat{p}(\mathbf{u})$:

$$\hat{p}(\mathbf{u}) = \arg \max_{\{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \int \mathbf{A}\mathbf{u} p(\mathbf{u}) d\mathbf{u}\}} \{D[p(\mathbf{u}) : \mu(\mathbf{u})]\} \quad (47)$$

où $\mu(\mathbf{u})$ est une loi *a priori* dont nous montrerons par la suite l'importance. La solution est bien connue :

$$\hat{p}(\mathbf{u}) = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\lambda})} \mu(\mathbf{u}) \exp \left[-\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}\mathbf{u} \right] \quad (48)$$

mais le plus intéressant est de voir ce que devient $\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{E}\{\mathbf{U}\}$. Bien évidemment, $\hat{\mathbf{x}}$ dépend de $\mu(\mathbf{u})$. Le tableau qui suit donne quelques exemples :

$\mu(\mathbf{u}) \propto \exp[-\frac{1}{2} \sum_j u_j^2]$	$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}$	$\mathbf{A} \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{y}$
$\mu(\mathbf{u}) \propto \exp[-\sum_j u_j]$	$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{1} ./ (\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} \pm \mathbf{1})$	$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$
$\mu(\mathbf{u}) \propto \exp[-\sum_j u_j^{\alpha-1} \exp[-\beta u_j]], \quad u_j > 0$	$\hat{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{1} ./ (\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} + \beta \mathbf{1})$	$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$

Dans le cas plus général, remplaçant (48) dans (47) et définissant $Z(\boldsymbol{\lambda}) = \int \mu(\mathbf{u}) \exp[-\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{u}] \, d\mathbf{u}$, $G(\mathbf{s}) = \ln \int \mu(\mathbf{u}) \exp[-\mathbf{s}^t \mathbf{u}] \, d\mathbf{u}$ et sa convexe conjuguée $F(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{s}} \{\mathbf{x}^t \mathbf{s} - G(\mathbf{s})\}$, on peut montrer que $\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{E}\{\mathbf{U}\}$ peut être obtenu, soit comme une fonction de son vecteur dual $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ par $\hat{\mathbf{x}} = G'(\mathbf{A}^t \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ où $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ est solution du problème d'optimisation

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ D(\boldsymbol{\lambda}) = \ln Z(\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} \right\}, \quad (49)$$

soit directement comme la solution du problème d'optimisation sous contraintes

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\{\mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}\}} \{F(\mathbf{x})\}. \quad (50)$$

$D(\boldsymbol{\lambda})$ est appelé ‘‘critère dual’’ et $F(\mathbf{x})$ ‘‘critère primal’’. Parfois, il est plus facile de résoudre le problème dual, mais il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression explicite pour $G(\mathbf{s})$ et son gradient $G'(\mathbf{s})$. Les fonctions $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{s})$ sont convexes conjuguées.

6 Conclusions

La notion d'entropie, vue comme une mesure de la quantité d'information dans les réalisations d'une variable aléatoire est utilisée de multiples façons dans différents domaines du traitement de l'information. Lors de son utilisation, il est très important de bien préciser quelle est la variable considérée, quelles sont les données, quelle est la relation entre les données et cette variable, et finalement, quelle est le critère optimisé. Par exemple, en estimation spectrale, nous avons vu comment le choix de la variable aléatoire ($X(n)$, $S(\omega)$ ou $Z(\omega)$), le choix du critère (entropie ou entropie relative) et le choix de la loi *a priori* dans le cas de l'entropie relative, peuvent influencer l'expression de la solution. Bien entendu, nous n'avons pas discuté ici le problème de l'estimation des coefficients de corrélation à partir des échantillons du signal. Par ailleurs, l'estimation de la densité spectrale de puissance d'un processus à partir d'une connaissance partielle de ses coefficients de corrélation n'est qu'un cas particulier des problèmes inverses linéaires.

Remerciements

L'auteur remercie Odile Macchi et Charles Soussen pour la relecture attentive de cet article.

Biographie de l'auteur

Ali Mohammad-Djafari est né en Iran en 1952. Il est Ingénieur de l'École Polytechnique de Téhéran (1975), Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité (1977), Docteur-Ingénieur (1981) et Docteur-ès-Sciences Physiques (1987) de l'Université de Paris-Sud, Orsay. Il travaille depuis 1977 au Laboratoire des Signaux et Systèmes au sein du groupe ‘‘Problèmes Inverses en Traitement du Signal et Imagerie’’. Chargé de Recherche au CNRS depuis 1983, il s'intéresse à la résolution des problèmes inverses en utilisant des méthodes d'inférence probabilistes. Parmi les applications de ses thèmes de recherche on peut mentionner : restauration et reconstruction des signaux mono- ou multi- variables, imagerie tomographique à rayons X, à ondes diffractées ou par courants de Foucault en contrôle non destructif (CND).

Références

- [1] C. Shannon and W. Weaver, "The mathematical theory of communication," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 1948.
- [2] E. T. Jaynes, "Information theory and statistical mechanics i," *Physical review*, vol. 106, pp. 620–630, 1957.
- [3] E. T. Jaynes, "Information theory and statistical mechanics ii," *Physical review*, vol. 108, pp. 171–190, 1957.
- [4] E. T. Jaynes, "Prior probabilities," *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, vol. SSC-4, pp. 227–241, September 1968.
- [5] S. Kullback, *Information Theory and Statistics*. New York: Wiley, 1959.
- [6] Itakura and Saito, "A statistical method for estimation of speech spectral density and formant frequencies," *Electron. and Commun.*, vol. 53-A, pp. 36–43, 1970.
- [7] L. Knockaert, "A class of statistical and spectral distance measures based on Bose-Einstein statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 11, pp. 3171–3174, 1963.
- [8] M. Schroeder, "Linear prediction, entropy and signal analysis," *IEEE ASSP Magazine*, pp. 3–11, juillet 1984.
- [9] E. T. Jaynes, "On the rationale of maximum-entropy methods," *Proceedings of the IEEE*, vol. 70, pp. 939–952, September 1982.
- [10] J. Shore and R. Johnson, "Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-26, pp. 26–37, January 1980.
- [11] J. E. Shore and R. W. Johnson, "Properties of cross-entropy minimization," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-27, pp. 472–482, July 1981.
- [12] A. Mohammad-Djafari, "Maximum d'entropie et problèmes inverses en imagerie," *Traitement du Signal*, pp. 87–116, 1994.
- [13] J.-F. Bercher, *Développement de critères de nature entropique pour la résolution des problèmes inverses linéaires*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, février 1995.
- [14] G. Le Besnerais, *Méthode du maximum d'entropie sur la moyenne, critères de reconstruction d'image et synthèse d'ouverture en radio-astronomie*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, décembre 1993.
- [15] J. Borwein and A. Lewis, "Duality relationships for entropy-like minimization problems," *SIAM Journal of Control*, vol. 29, pp. 325–338, March 1991.
- [16] H. Akaike, "Power spectrum estimation through autoregressive model fitting," *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, vol. 21, pp. 407–419, 1969. JFG.
- [17] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Transactions on Automatic and Control*, vol. AC-19, pp. 716–723, December 1974. JFG.
- [18] D. Farrier, "Jaynes' principle and maximum entropy spectral estimation," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 1176–1183, 1984.
- [19] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 33, pp. 387–392, avril 1985.
- [20] M. Wax, "Detection and localization of multiple sources via the stochastic signals model," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. SP-39, pp. 2450–2456, novembre 1991. FD.
- [21] T. Matsuoka and U. T.J., "Information theory measures with application to model identification," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 34, pp. 511–517, juin 1986.
- [22] J. P. Burg, "Maximum entropy spectral analysis," in *Proc. of the 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, (Oklahoma City), pp. 34–41, October 1967.
- [23] J. E. Shore, "Minimum cross-entropy spectral analysis," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 230–237, April 1981.
- [24] R. Johnson and J. Shore, "Minimum cross-entropy spectral analysis," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 230–237, avril 1981.
- [25] J. McClellan, "Multidimensional spectral estimation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 70, pp. 1029–1039, septembre 1982.
- [26] R. Johnson and J. Shore, "Which is better entropy expression for speech processing: -slogs or logs?," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 129–137, 1984.
- [27] B. Picinbono and Barret, "Nouvelle présentation de la méthode du maximum d'entropie," *Traitement du Signal*, vol. 7, no. 2, pp. 153–158, 1990.