

# Fusion bayésienne de données en imagerie X et ultrasonore

Ali MOHAMMAD-DJAFARI

Laboratoire des Signaux et Systèmes, UMR 8506 (CNRS-Supélec-UPS)  
3 rue Joliôt Curie, Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif sur Yvette, France  
djafari@lss.supelec.fr

**Résumé** – La plupart des méthodes classiques de fusion de données en imagerie tomographique opèrent sur des images déjà reconstruites par chacun des systèmes d'imagerie. L'objectif de ce travail est d'utiliser les deux jeux de données issus directement des mesures pour fournir une image reconstruite en exploitant d'une manière optimale les informations apportées par ces données. Plus précisément, cette communication présente un algorithme de reconstruction d'image en tomographie X qui peut intégrer les informations contenues dans un jeux de données échographiques obtenu sur le même objet.

**Abstract** – Most classical data fusion methods in computed tomography use as entry the already reconstructed images by different systems. The main contribution of this work is to use directly the measured data to reconstruct an image which uses, in an optimal way, the informations contained in each set of data. More precisely, this communication presents a reconstruction algorithm for X ray tomography which can use the information content of a set of echographical data on the same object.

## 1 Introduction

La figure 1 montre le problème de la fusion de données en reconstruction d'images. L'objectif est d'obtenir une meilleure estimée de l'image  $f(x, y)$ , représentant la distribution de la densité volumique de l'objet en tomographie X et de l'image  $r(x, y)$ , représentant la distribution de la réflectivité en échographie ultrasonore, en utilisant les données radiographiques  $g_1(r, \phi)$  et échographiques  $g_2(x, t)$  simultanément plutôt que d'utiliser ces données indépendamment.

Dans une première approximation, on peut supposer que les relations liants les mesures aux inconnues est linéaire :

$$\begin{cases} g_1(r, \phi) = \int_{L(r, \phi)} f(x, y) dl + \epsilon_1(r, \phi), \\ g_2(x, t) = \int r(x, y)h(y - t) dy + \epsilon_2(x, t), \end{cases} \quad (1)$$

où la première équation est une modèle de transformée de Radon et la deuxième équation est une modèle de convolution par rapport à la variable  $y$ .

Après la discrétisation, on peut écrire ces deux équations sous la forme:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{H}_1 \mathbf{x} + \epsilon_1 \\ \mathbf{z} = \mathbf{H}_2 \mathbf{r} + \epsilon_2 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\mathbf{y}$  représente les données radiographiques,  $\mathbf{z}$  les données échographiques,  $\mathbf{x}$  l'image de la densité de la matière et  $\mathbf{r}$  l'image de la réflectivité entre les différentes régions à l'intérieur du corps étudié.  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  représentent les deux opérateurs linéaires et  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  toutes les erreurs de modélisation, des approximations lors de la discrétisation et les bruits de mesures.

## 2 Modélisation pour la fusion de données

La plupart des méthodes classiques de fusion de données opèrent sur des images déjà reconstruites, c'est-à-dire qu'ils utilisent d'abord les deux jeux de données  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  indépendamment pour construire deux images  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{r}}$ , et ensuite effectuent une fusion.

L'approche que nous proposons est d'utiliser les deux jeux de données directement pour fournir, soit deux images  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{r}}$  qui bénéficient toutes les deux de l'information mutuelle contenue dans ces deux jeux de données  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . La principale idée est d'utiliser l'approche bayésienne pour déduire la loi *a posteriori*  $p(\mathbf{x}, \mathbf{r} | \mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto p(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{r}) p(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ . Mais alors, la difficulté essentielle est l'attribution d'une loi de probabilité *a priori*  $p(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ . Cette étape peut se résoudre si on a une relation simple liant  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{x}$ , mais ceci s'avère très difficile en pratique. Tout ce que l'on sait est que  $r_j = g(x_{j+1} - x_j)$  avec  $g$  une fonction monotone et croissante, mais inconnue.

Un moyen pour arriver à décrire cette relation est de trouver une grandeur cachée  $\mathbf{q}$  intermédiaire commune entre les deux quantités  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{x}$ . Deux exemples de variables cachées sont courants: variables de contour et variable de régions. Dans des travaux précédents [1, 2, 3, 4, 5, 6], nous avons proposé et utilisé un champs de contours. En effet, si on note par  $q_j$  une variable binaire représentant la présence ou non d'un contour entre deux pixels voisins de l'image, il est alors facile de modéliser ce lien par

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_{j+1} - x_j| > s_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et } q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |r_j| > s_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3)$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont deux seuils à fixer ou à déterminer. Avec un tel modèle, on peut écrire

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q} | \mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto p(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q}) p(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \propto p(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q}) p(\mathbf{x} | \mathbf{r}, \mathbf{q}) p(\mathbf{r} | \mathbf{q}) p(\mathbf{q}) \quad (4)$$

et il faut alors attribuer ces lois *a priori* et trouver l'expression de la loi *a posteriori* pour pouvoir inférer sur  $\mathbf{x}$ , sur  $\mathbf{r}$ , sur  $\mathbf{q}$  ou même sur les trois à la fois en fusionnant les deux jeux de données  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . Pour cela nous avons fait les hypothèses suivantes:

1. Indépendance conditionnelle de  $\epsilon_1$  et de  $\epsilon_2$  avec des lois gaussiennes :  $p(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p(\mathbf{z} | \mathbf{r})$  avec

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \sigma_1^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_1 \mathbf{x}\|^2 \right\} \quad (5)$$

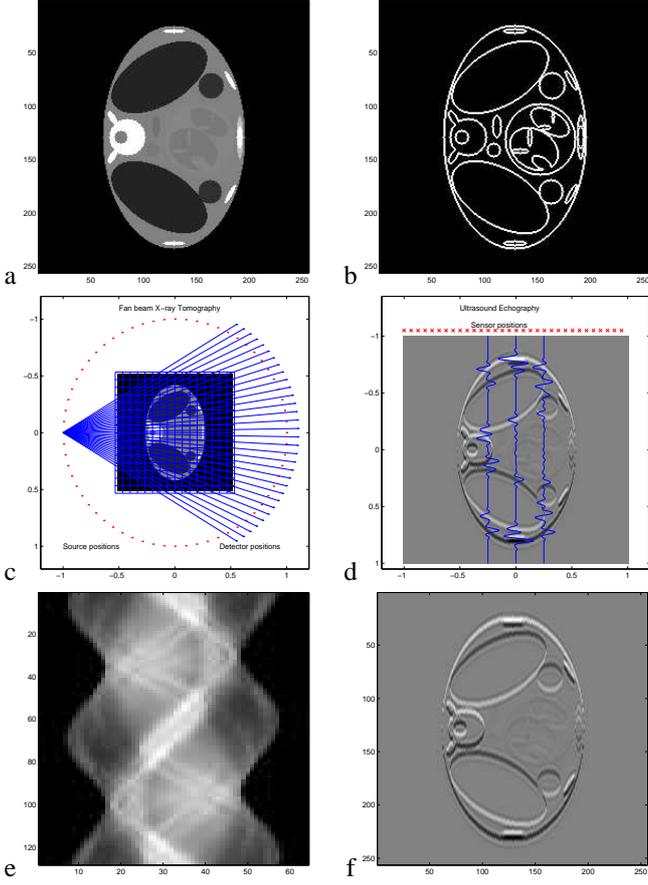


FIG. 1: Fusion de données en tomographie: (a) l'objet original, (b) Les contours des différentes régions dans l'objet, (c) acquisition de données en géométrie en éventail en tomographie X, (d) acquisition de données en échographie ultrasonore, (e) Les données (sinogramme) en tomographie X, (f) Les données en échographie ultrasonore.

et

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{r}, \sigma_2^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}_2 \mathbf{r}\|^2 \right\} \quad (6)$$

2. une loi de Bernoulli pour  $p(\mathbf{q})$ :

$$p(\mathbf{q}) \propto \prod_{j=1}^n q_j^\lambda (1 - q_j)^{1-\lambda} \quad (7)$$

3. Une loi gaussienne pour  $p(\mathbf{r}|\mathbf{q})$ :

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{q}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} \mathbf{r}^t \mathbf{Q} \mathbf{r} \right\} \quad (8)$$

avec  $\mathbf{Q} = \text{diag}[q_1, \dots, q_n]$ .

4. Un modèle markovien pour  $p(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \mathbf{q})$ :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \mathbf{q}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{q}) \propto \exp \{-U(\mathbf{x}|\mathbf{q})\}$$

avec

$$U(\mathbf{x}|\mathbf{q}) = \sum_j (1 - q_j)(x_j - x_{j-1})^2. \quad (9)$$

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour écrire l'expression de la loi *a posteriori*:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p(\mathbf{z}|\mathbf{r}) p(\mathbf{x}|\mathbf{q}) p(\mathbf{r}|\mathbf{q}) p(\mathbf{q}) \quad (10)$$

à partir de laquelle nous pouvons inférer sur les grandeurs inconnues  $(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ .

Une étape difficile avec cette modélisation est l'estimation de  $\mathbf{q}$  qui nécessite une optimisation combinatoire qui rend la méthode impraticable.

Dans des travaux précédents [4, 5, 6], nous avons proposé différents schémas d'approximations et de simplifications qui résolvent partiellement cette difficulté. L'idée principale est d'estimer d'abord  $\mathbf{r}$  à partir de données de  $\mathbf{z}$  à l'aide de :

$$\hat{\mathbf{r}} = \arg \max_{\mathbf{r}} \{p(\mathbf{r}|\mathbf{z})\} = \arg \min_{\mathbf{r}} \{J_1(\mathbf{r}|\mathbf{z})\}$$

$$J_1(\mathbf{r}|\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{H}_2 \mathbf{r}\|^2 + \lambda \sum_j |r_j|^\beta. \quad (11)$$

Ensuite en déduire une estimation pour  $\mathbf{q}$ , par exemple par  $q_j = |r_j| / \max(|r_j|)$  ou par  $q_j = 1$ , si  $|r_j| > s$  et  $q_j = 0$  ailleurs. Finalement, utiliser cette estimée de  $\mathbf{q}$  et les données  $\mathbf{y}$  pour estimer  $\mathbf{x}$  par

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \hat{\mathbf{q}})\} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{J_2(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \hat{\mathbf{q}})\}$$

avec

$$J_2(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \hat{\mathbf{q}}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_1 \mathbf{x}\|^2 + \lambda_2 \sum_j (1 - q_j) |x_{j+1} - x_j|^2. \quad (12)$$

La figure 2 montre un exemple de résultats typiques.

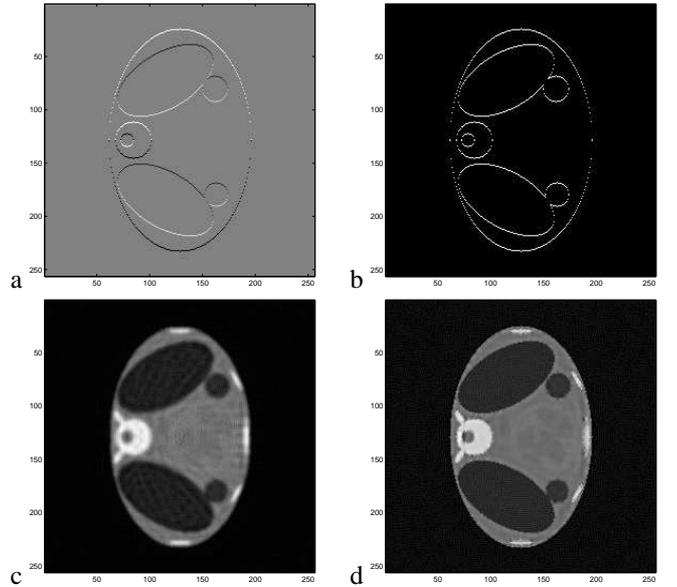


FIG. 2: a) Estimé de  $\mathbf{r}$  à partir de  $\mathbf{z}$ , b) Estimé de  $\mathbf{q}$  à partir de  $\mathbf{r}$ , c) Estimé de  $\mathbf{x}$  à partir de données  $\mathbf{y}$ , d) Estimé de  $\mathbf{x}$  à partir de  $\mathbf{x}$  et de l'estimé de  $\mathbf{q}$ .

Cependant, l'estimée  $\hat{\mathbf{q}}$  ainsi obtenue n'assure pas ni la continuité des contours ni leur fermeture. Ces deux propriétés sont souvent nécessaires lorsque nous avons des objets qui sont constitués de régions homogènes.

### 3 Modélisation d'objets constitués de régions homogènes

Afin de modéliser des objets constitués de régions homogènes, nous introduisons une nouvelle variable cachée qui est un champs d'étiquettes  $\mathbf{t}$  pour des régions pour lequel nous choisissons soit un modèle i.i.d. soit un champ de Potts :

$$p(\mathbf{t}) \propto \exp \left\{ -\mu \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{t}) \right\} \quad (13)$$

où  $\phi_j(\mathbf{t})$  est une fonction potentiel appropriée :  $\phi_j(\mathbf{t}) = \phi(t_j)$  dans le cas i.i.d. et  $\phi_j(\mathbf{t}) = \phi(t_j, t_{j-1})$  dans le cas d'un modèle markovien, et où  $\mu$  est un paramètre à estimer.

Notons qu'il y a une relation très étroite entre les champs des labels  $\mathbf{t}$  et les champs des contours  $\mathbf{q}$  et le passage de  $\mathbf{t}$  vers  $\mathbf{q}$  est déterministe et facile à calculer. Ainsi les lois *a priori* dans les étapes 2, 3 et 4 de la modélisation précédente sont modifiées et remplacées par

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}|\mathbf{t}) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \sum_j \left( \frac{x_{kj} - m_k}{\sigma_k} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \left( \frac{\|\mathbf{x}_k - m_k \mathbf{1}_k\|^2}{\sigma_k^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

où  $K$  est le nombre des régions segmentées à l'aide de  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{x}_k$  représente l'ensemble des pixels qui se trouvent dans la région  $k$  :

$$\mathbf{x}_k = \{x_j : t_j = k\}, \quad (15)$$

$m_k$  et  $\sigma_k^2$  sont respectivement les moyennes et les variances des valeurs de ces pixels.  $\lambda_k$  sont proportionnelles aux nombres relatives de pixels dans ces régions.

On remarque que ce choix permet de favoriser des images avec des régions plus homogènes et donc des contours plus réguliers. En effet, une propriété souvent importante dans un grand nombre d'applications, surtout en contrôle non destructif (CND) est l'homogénéité par régions compactes et ce modèle de mélange de gaussiennes colorées non seulement utilise les contours mais aussi les régions (coopération entre régions et contours) et favorise la création des régions compactes.

Dans cette expression  $\{x_{kj}, j \in R_k\}$  représente l'ensemble des pixels se trouvant dans la région  $k$ . La difficulté essentielle en pratique est l'estimation des supports  $R_k$  de ces régions, leur nombre  $K$  et les hyperparamètres  $m_k$  et  $\sigma_k^2$ . Cela devient encore plus délicat si on souhaite imposer d'autres contraintes sur les formes de ces régions : connexité, compacité, convexité ou des contraintes sur leurs nombres et les longueurs ou les courbures de leurs contours.

Dans ce travail, nous proposons un algorithme itératif de relaxation pratique du type restauration-maximisation basé sur des lois *a posteriori* :

- $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  pour l'estimation initiale de  $\mathbf{x}$  à partir de  $\mathbf{y}$ ,
- $P(\mathbf{t}|\mathbf{x})$  pour l'étape de la segmentation de l'image  $\mathbf{x}$ ,
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{z})$  et les liens déterministes entre  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{r}$  d'une part et de  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{q}$  d'autre part pour l'estimation de  $\mathbf{q}$ ,
- $p(\mathbf{x}|\mathbf{t}, \mathbf{y})$  pour l'estimation de  $\mathbf{x}$  à partir du résultat de segmentation  $\mathbf{t}$  et les données  $\mathbf{y}$ , et finalement,
- $p(\mathbf{r}|\mathbf{q}, \mathbf{z})$  pour l'estimation de  $\mathbf{r}$  à partir du résultat de l'estimation des contours  $\mathbf{q}$  et les données  $\mathbf{z}$ .

Sans trop rentrer dans le détail des expressions de ces différentes lois, les différentes étapes de cet algorithme sont :

1. Initialisation :  $K = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$ 
  - Estimation initiale  $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}$  de  $\mathbf{x}$  à partir de seules données  $\mathbf{y}$  en optimisant

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_1 \mathbf{x}\|^2 + \lambda_x \|\mathbf{x}\|^2.$$

Il s'agit de l'estimation au sens du maximum *a posteriori* (MAP) de  $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{x}|\mathbf{y})\}$  avec un modèle gaussien i.i.d. sur  $\mathbf{x}$ .

- Estimation initiale  $\hat{\mathbf{r}}^{(0)}$  de  $\mathbf{r}$  en optimisant

$$J(\mathbf{r}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{H}_2 \mathbf{r}\|^2 + \lambda_r \|\mathbf{r}\|^\beta \text{ avec } \beta = 1, 2.$$

Il s'agit de l'estimation au sens du MAP de

$$\hat{\mathbf{r}}^{(0)} = \arg \max_{\mathbf{r}} \{p(\mathbf{r}|\mathbf{z})\}$$

avec un modèle gaussien généralisé i.i.d. pour  $\mathbf{r}$ .

2. Classification et segmentation : estimation de  $K$ , des  $R_k$ , à partir de  $\hat{\mathbf{x}}$ . C'est l'étape la plus délicate, car il s'agit de segmenter l'image  $\mathbf{x}$  obtenue dans l'itération précédente. Avec la modélisation proposée, il s'agit de l'estimation de  $\mathbf{t}$  à l'aide de la loi  $p(\mathbf{t}|\mathbf{x})$ , ce qui fixe  $K$  et ces régions  $R_k$ , puis l'estimation  $m_k$  et  $\sigma_k^2$  à l'aide des lois  $p(\mathbf{x}_k)$  qui sont des lois gaussiennes. La complexité de cette étape dépend essentiellement sur la modélisation de  $p(\mathbf{t})$  dans l'expression de  $P(\mathbf{t}|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|\mathbf{t}) p(\mathbf{t})$ . Avec un modèle i.i.d. pour les  $p(x_j|t_j)$  et  $p(t_j)$  et pour  $K$  fixé, il est facile de montrer que cette étape se résume en deux étapes :

- Détermination de  $K - 1$  seuils  $s_k, k = 1, \dots, K - 1$  à l'aide de :

$$P(t_j = k | x_j = s_k) = P(t_j = k + 1 | x_j = s_k), \quad k = 1, \dots, K - 1$$

- Détermination des indices des régions  $R_k = \{j : t_j = k\}$

$$\hat{t}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \leq s_1 \\ k & \text{si } s_k < x_j \leq s_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq K - 1 \\ K & \text{si } s_{K-1} < x_j \end{cases}$$

- Remise à jour des paramètres  $m_k, \sigma_k^2$  et  $p_k$  avec :

$n_k$  = nombre des pixels dans la région  $k$ ,

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{n_k} \sum_j f_{kj}, & \sigma_k^2 &= \frac{1}{n_k} \sum_j (f_{kj} - m_k)^2, \\ p_k &= n_k/n, & p_{k,l} &= n_{kl} / \sum_k n_{kl} \end{aligned}$$

où  $n$  est le nombre total des pixels dans l'image.

3. Estimation des contours  $\hat{\mathbf{q}}$  :

- Estimation de  $\hat{\mathbf{q}}_1$  à partir de  $\hat{\mathbf{r}}$  par seuillage :

$$q_j = 1 \text{ si } |r_j| > s \text{ et } 0 \text{ ailleurs}$$

et estimation de  $\hat{\mathbf{q}}_2$  à partir de  $\hat{\mathbf{t}}$  qui est une relation déterministe.

- Fusion des contours des régions  $\hat{\mathbf{q}}_1$  et  $\hat{\mathbf{q}}_2$  pour obtenir  $\hat{\mathbf{q}}$ , par exemple à l'aide d'un OU logique.

4. Estimation de  $\mathbf{x}$  en optimisant

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_1 \mathbf{x}\|^2 + \lambda_x \sum_{k=1}^K \left( \frac{\|\mathbf{x}_k - m_k\|^2}{\sigma_k^2} \right)$$

que l'on peut considérer comme de l'estimation au sens du MAP de  $\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{t})\}$  avec le modèle de mélange de gaussiennes (14) pour  $\mathbf{x}$ .

5. Estimation de  $r$  en optimisant

$$J(x) = \|z - H_2 r\|^2 + \lambda_h \sum_{j=1}^N q_j |r_j|^2$$

que l'on peut considérer comme de l'estimation au sens du MAP de  $\hat{x} = \arg \max_x \{p(r|z, q)\}$  avec le modèle de mélange de gaussiennes (14) pour  $x$ .

6. Test de convergence : tant que le nombre des régions n'est pas stabilisé retourner à l'étape 2.

Malheureusement il est très difficile d'établir une preuve quelconque pour la convergence de cet algorithme. Nous arrêtons l'algorithme lorsque le nombre total des régions et leurs paramètres sont stabilisés.

Les différentes optimisations des critères  $J(x)$  ou  $J(r)$  dans chaque étape sont faites soit par un algorithme du type gradient conjugué soit par un algorithme du type ICD.

Un travail de comparaison de performances de cet algorithme et un algorithme du type MCMC avec échantillonneur de Gibbs qui est théoriquement plus optimale mais plus coûteux est en cours.

Sur la figure suivante un exemple typique de résultats que l'on obtient par cet algorithme est présenté.

## 4 Conclusion

Une nouvelle méthode de fusion de données est proposée qui permet d'obtenir directement une image ségmentée en fusionnant les données radio graphiques en imagerie X et les données échographiques ultrasonores.

## Références

- [1] S. Gautier, G. Le Besnerais, A. Mohammad-Djafari, and B. Lavayssière, *Data fusion in the field of non destructive testing*. Maximum Entropy and Bayesian Methods, Santa Fe, NM: Kluwer Academic Publ., K. Hanson ed., 1995.
- [2] S. Gautier, J. Idier, A. Mohammad-Djafari, and B. Lavayssière, "Fusion de données gammagraphiques et ultrasonores," in *Actes du 16<sup>e</sup> colloque GRETSI*, (Grenoble, France), pp. 781–784, September 1997.
- [3] S. Gautier, J. Idier, A. Mohammad-Djafari, and B. Lavayssière, "X-ray and ultrasound data fusion," in *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, (Chicago, IL), pp. 366–369, October 1998.
- [4] A. Mohammad-Djafari, "Hierarchical markov modeling for fusion of x ray radiographic data and anatomical data in computed tomography," in *Int. Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2002)*, 7-10 Jul., Washington DC, USA, July 2002.
- [5] A. Mohammad-Djafari, "Fusion of x ray and geometrical data in computed tomography for non destructive testing applications," in *Fusion 2002, 7-11 Jul., Annapolis, Maryland, USA*, July 2002.
- [6] A. Mohammad-Djafari, "Bayesian approach with hierarchical markov modeling for data fusion in image reconstruction applications," in *Fusion 2002, 7-11 Jul., Annapolis, Maryland, USA*, July 2002.

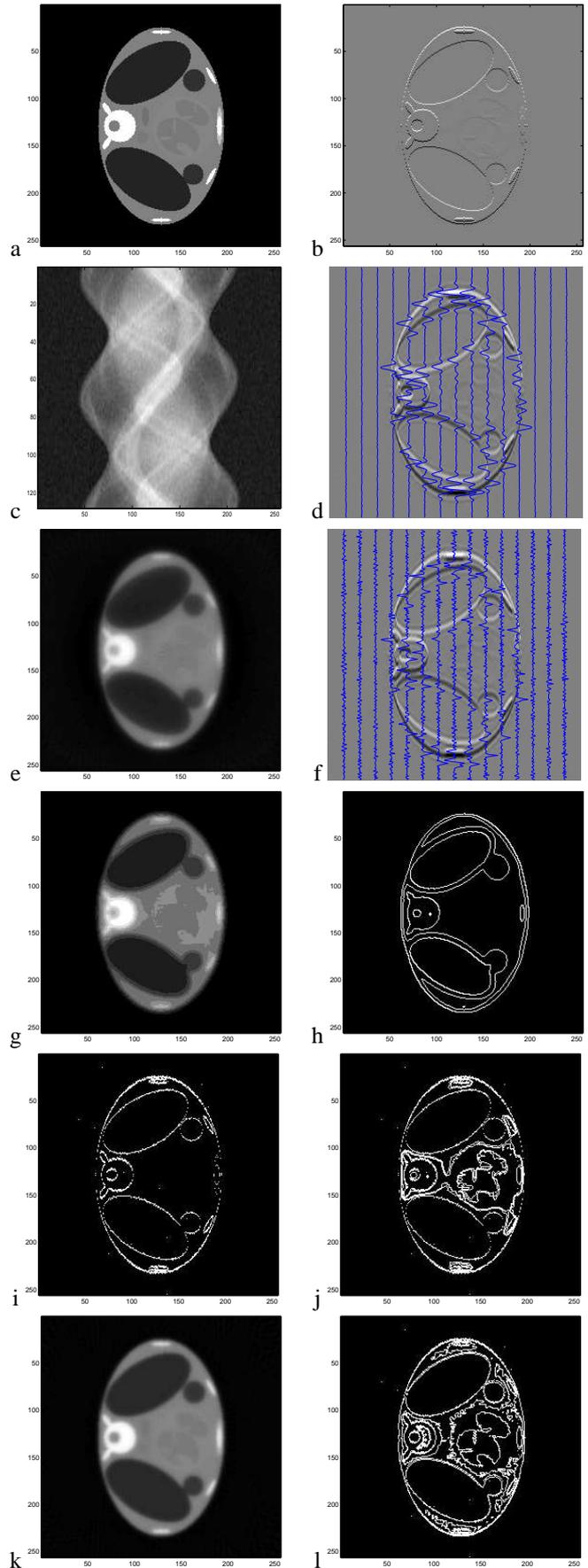


FIG. 3: a,b) Objets  $x$  et  $r$ , c,d) Données  $y$  et  $z$ , e,f) Estimés initiales de  $x$  et de  $r$ , g,h) Estimés de  $t$  et de  $\hat{q}_1$ , i,j) Estimés de  $\hat{q}_2$  et résultat de fusion de  $\hat{q}_1$  et  $\hat{q}_2$ , k,l) Estimés finaux de  $x$  et de  $q$ .