

Table des matières

Introduction <i>Jérôme IDIER</i>	13
I Problèmes et outils de base	23
1 Problèmes inverses et problèmes mal posés <i>Guy DEMOMENT, Jérôme IDIER</i>	25
1.1. Introduction	25
1.2. Exemple élémentaire	26
1.3. Problèmes mal posés	30
1.4. Inversion généralisée	34
1.5. Discrétisation et conditionnement	36
1.6. Conclusion	38
1.7. Bibliographie	39
2 Régularisation d'un problème mal posé : approches génériques <i>Guy DEMOMENT, Jérôme IDIER</i>	41
2.1. Régularisation	41
2.2. Méthodes de descente de critère	48
2.3. Choix du coefficient de régularisation	53
2.4. Bibliographie	56
3 Inversion dans un cadre probabiliste <i>Guy DEMOMENT, Yves GOUSSARD</i>	59
3.1. Inversion et inférence	59
3.2. Inférence statistique	60
3.3. Approche bayésienne de l'inversion	64
3.4. Liens avec les méthodes déterministes	66
3.5. Choix des hyperparamètres	67
3.6. Modèle <i>a priori</i>	69
3.7. Choix de critères	71
3.8. Le cas linéaire et gaussien	72
3.9. Bibliographie	76

II La déconvolution 79

4 Déconvolution linéaire et filtrage inverse
Guy LE BESNERAIS, Jean-François GIOVANNELLI, Guy DEMOMENT 81

4.1. Introduction 81

4.2. Déconvolution à temps continu 82

4.3. Discrétisation du problème 85

4.4. Déconvolution en bloc 91

4.5. Déconvolution récursive 102

4.6. Conclusion 112

4.7. Bibliographie 112

5 Déconvolution impulsionnelle
Frédéric CHAMPAGNAT, Yves GOUSSARD, Stéphane GAUTIER, Jérôme IDIER 115

5.1. Introduction 115

5.2. Pénalisation des réflectivités, déconvolutions L2LP/L2Hy 117

5.3. Déconvolution Bernoulli-gaussienne 122

5.4. Exemples de traitements et discussion 128

5.5. Extensions 132

5.6. Conclusion 134

5.7. Bibliographie 135

6 Déconvolution en imagerie
Jérôme IDIER, Laure BLANC-FÉRAUD 139

6.1. Introduction 139

6.2. La régularisation au sens de Tikhonov 140

6.3. Détection-estimation 146

6.4. Approche non quadratique 148

6.5. Critères augmentés semi-quadratiques 154

6.6. Application en déconvolution d'image 158

6.7. Conclusion 162

6.8. Bibliographie 163

III Problèmes et outils avancés 167

7 Modèles de Gibbs-Markov pour les images
Jérôme IDIER 169

7.1. Introduction 169

7.2. Cadre statistique bayésien 170

7.3. Les champs de Gibbs-Markov 171

7.4. Outils statistiques, échantillonnage stochastique 183

7.5.	Conclusion	192
7.6.	Bibliographie	193
8	Problèmes non supervisés <i>Xavier DESCOMBES, Yves GOUSSARD</i>	195
8.1.	Introduction et position du problème	195
8.2.	Champ directement observé	197
8.3.	Champ indirectement observé	203
8.4.	Conclusion	214
8.5.	Bibliographie	215
IV	Quelques applications	217
9	Application de la déconvolution au CND par ultrasons <i>Stéphane GAUTIER, Frédéric CHAMPAGNAT, Jérôme IDIER</i>	219
9.1.	Introduction	219
9.2.	Exemple de contrôle et difficultés d'interprétation	220
9.3.	Définition du modèle direct de convolution	222
9.4.	Déconvolution myope	223
9.5.	Traitement de données réelles	231
9.6.	Conclusion	239
9.7.	Bibliographie	240
10	Problèmes inverses en imagerie optique à travers la turbulence <i>Laurent MUGNIER, Guy LE BESNERAIS</i>	241
10.1.	L'imagerie optique en présence de turbulence	241
10.2.	Déconvolution « simple »	246
10.3.	Déconvolution par analyse de front d'onde (DECASO)	247
10.4.	Optique adaptative	255
10.5.	Synthèse d'ouverture optique	259
10.6.	Bibliographie	267
11	Caractérisation spectrale en vélocimétrie Doppler ultrasonore <i>Jean-François GIOVANNELLI, Alain HERMENT</i>	271
11.1.	Mesure de la vitesse en imagerie médicale	271
11.2.	Analyse spectrale adaptative	276
11.3.	Poursuite de moments spectraux	283
11.4.	Conclusion	293
11.5.	Bibliographie	294

12	Approche bayésienne pour les problèmes inverses	
12	Reconstruction tomographique pour un faible nombre de projections <i>Ali MOHAMMAD-DJAFARI, Jean-Marc DINTEN</i>	297
12.1.	Introduction	297
12.2.	Modèle de génération des projections	298
12.3.	Méthodes analytiques 2D	299
12.4.	Méthodes analytiques 3D	303
12.5.	Limitations des méthodes analytiques	303
12.6.	Approche discrète de la reconstruction	305
12.7.	Choix de critère et méthodes de reconstruction	307
12.8.	Algorithmes de reconstruction	309
12.9.	Modèles spécifiques pour les objets binaires	314
12.10.	Illustrations	315
12.11.	Conclusions	315
12.12.	Bibliographie	317
13	Tomographie de diffraction <i>Hervé CARFANTAN, Ali MOHAMMAD-DJAFARI</i>	321
13.1.	Introduction	321
13.2.	Modélisation du problème	322
13.3.	Discrétisation du problème direct	326
13.4.	Construction de critères pour l'inversion	330
13.5.	Résolution du problème inverse	334
13.6.	Conclusion	339
13.7.	Bibliographie	340
14	Imagerie à partir de données de faible intensité <i>Ken SAUER, Jean-Baptiste THIBAUT</i>	343
14.1.	Introduction	343
14.2.	Statistique des données d'imagerie de faible intensité	345
14.3.	Effets du faible taux de comptage poissonnien	350
14.4.	Implémentation et calcul des estimées bayésiennes	355
14.5.	Conclusion	360
14.6.	Bibliographie	360
	Index	368

Chapitre 12

Reconstruction tomographique pour un faible nombre de projections

12.1. Introduction

La tomographie a pour objectif de reconstruire de façon non destructive une cartographie d'un paramètre caractéristique d'un objet, par exemple sa densité. Son principe repose sur l'analyse de l'interaction entre un rayonnement (X , électronique ou optique par exemple) que l'on propage dans l'objet. La grandeur caractéristique recherchée peut être obtenue, à partir des observations, par inversion des équations de transport dans la matière.

La tomographie connaît de nombreux domaines d'application. En médecine, les systèmes de type scanner ou IRM permettent d'observer des indices internes de pathologies (tumeurs, anévrismes, etc.). En médecine nucléaire, par l'imagerie fonctionnelle, on peut suivre l'évolution interne d'un traceur et mettre ainsi en évidence d'éventuels dysfonctionnements. Dans l'industrie, la tomographie est utilisée pour la mise au point de processus de fabrication (soudage, moulage, etc.), pour le contrôle de la qualité des productions, ou encore pour la sécurité (contrôle du contenu des bagages). C'est aussi un outil important d'investigation pour la recherche dans de nombreux domaines : architecture de la structure osseuse, analyse d'écoulements, etc.

Dans un certain nombre de configurations, dues, par exemple, en médical, à une limitation de la dose transmise au patient, en industriel, à une cadence à respecter ou au caractère rapide du phénomène observé, on ne dispose que d'un nombre très limité de projections. De plus, les contraintes géométriques peuvent limiter la répartition de ces projections sur des angles limités. Ce chapitre s'attachera plus particulièrement à présenter les méthodes de reconstruction

adaptées à ces contextes. Les méthodes de reconstruction seront présentées dans le cas où le rayonnement est la transmission des rayons X.

Dans un premier temps, on présentera la relation entre les observations et les données d'atténuation recherchées. On rappellera ensuite les méthodes analytiques de reconstruction 2D et 3D, on précisera leurs limites dans le cas d'un nombre limité de projections et on introduira le formalisme discret de reconstruction. Dans les paragraphes suivants, on présentera des approches de reconstruction adaptées au cadre discret et au nombre limité de projections. Enfin, on illustrera, au travers d'exemples, les résultats obtenus par les différentes approches.

12.2. Modèle de génération des projections

Si un objet de matière homogène est illuminé par des rayons X et qu'un rayon monoénergétique de faible largeur traverse cet objet, l'intensité du rayon mesuré à la sortie s'obtient par :

$$I = I_0 \exp \{-\mu L\} \quad (\text{loi de Beer-Lambert}) \quad (12.1)$$

où I_0 est l'intensité du rayon à l'entrée, L la distance parcourue par le rayon dans l'objet et μ la constante d'atténuation linéaire de l'objet qui dépend de la densité de matière, de sa composition nucléaire et de l'énergie du flux X. Généralisons cette relation à une section transversale d'un objet non homogène perpendiculaire à l'axe oz traversé par les rayons. En caractérisant l'objet par la distribution de sa constante d'atténuation linéaire μ , fonction continue des

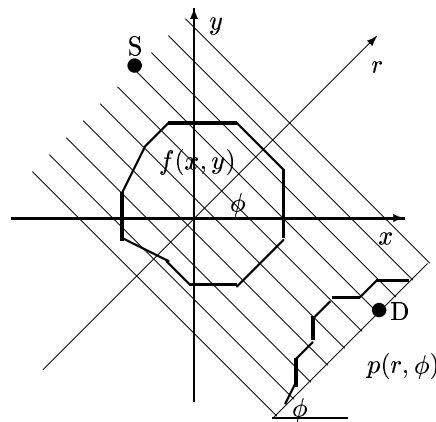


Figure 12.1. Tomographie X

deux variables d'espace $\mu(x, y) = f(x, y)$; on a alors :

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_L f(x, y) dl \right\} \implies - \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \int_L f(x, y) dl \quad (12.2)$$

où dl est l'élément de longueur sur le parcours L . En notant $p = - \ln I/I_0$ et en déplaçant en parallèle l'émetteur (source S) et le récepteur (détecteur D) sur une ligne droite faisant un angle ϕ avec l'axe ox , (cf. figure 12.1), on obtient ce que l'on appelle une *projection* $p(r, \phi)$:

$$p(r, \phi) = \int_L f(x, y) dl = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy \quad (12.3)$$

La reconstruction d'image en tomographie X consiste à rechercher une estimation $\hat{f}(x, y)$ de $f(x, y)$ à partir des projections $p(r, \phi_i)$, $i = 1, \dots, M$. On peut facilement étendre ceci au cas 3D où l'objectif est de rechercher une estimation $\hat{f}(x, y, z)$ de $f(x, y, z)$ à partir de ses radiographies $p(r_1, r_2, \vec{u}_i)$, $i = 1, \dots, M$, où \vec{u}_i représente la direction de la projection i . Dans ce chapitre, on se place particulièrement dans le contexte où l'on a un faible nombre de projections limitées en angles ϕ_i .

12.3. Méthodes analytiques 2D

Si l'on se place dans le cas idéal où l'on connaît parfaitement la fonction $p(r, \phi)$ pour toute valeur de r et de ϕ , alors le problème de la reconstruction se résume à l'inversion de la transformée de Radon (TR) \mathcal{R} [DEA 83] :

$$p(r, \phi) = \iint f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy \quad (12.4)$$

dont l'expression analytique de l'inverse est :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\partial p(r, \phi) / \partial r}{r - x \cos \phi - y \sin \phi} dr d\phi. \quad (12.5)$$

En pratique, on ne dispose que des mesures de $p(r, \phi)$ pour des valeurs discrètes de ϕ et de r . On doit alors approcher ces intégrales par des sommes. Deux grandes difficultés apparaissent alors : d'une part, l'approximation de $\partial p(r, \phi) / \partial r$; d'autre part, le calcul approché de l'intégrale en r , en raison de la singularité de son noyau. Par ailleurs, autant la discrétisation suivant l'axe r se fait raisonnablement finement, autant la discrétisation suivant l'angle ϕ est, en général, plus parcimonieuse. Ces contraintes font que l'application directe de l'expression de l'inverse de la TR est restée sans utilisation pratique pendant de longues années, car en dehors du cas théorique et idéal, l'application directe de cette formule d'inversion ne donne pas de résultats probants.

C'est pour obtenir des solutions approchées plus satisfaisantes qu'un grand nombre de méthodes ont été proposées [BRO 78, BUD 79, CHO 74, HER 80,

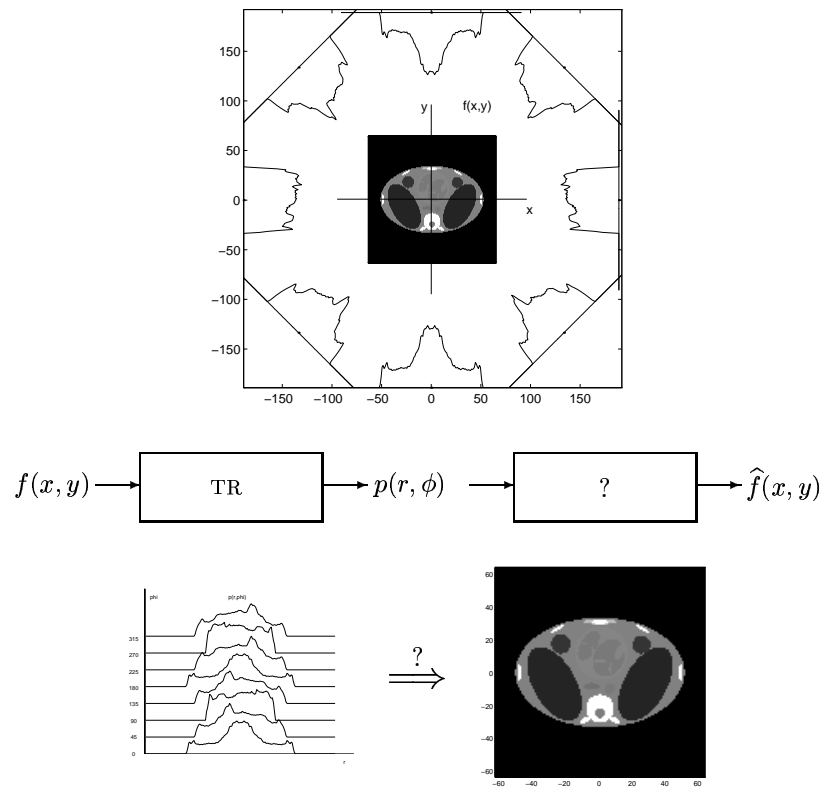


Figure 12.2. Problème de la reconstruction d'image en tomographie X en 2D

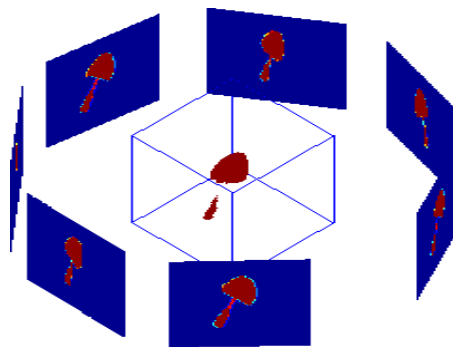


Figure 12.3. Problème de la reconstruction d'image en tomographie X en 3D

HER 87, MOH 88, NAT 80]. Certaines opèrent directement sur ces équations, d'autres passent par l'intermédiaire de transformations auxiliaires : transformée de Hilbert (TH), de Fourier (TF). On peut résumer l'ensemble de ces méthodes en définissant les opérateurs :

- dérivation \mathcal{D} : $\bar{p}(r, \phi) = \partial p(r, \phi) / \partial r,$
- TH \mathcal{H} : $g(r', \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{p}(r, \phi)}{(r - r')} dr,$
- rétroprojection (RP) \mathcal{B} : $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi,$
- TF 1D \mathcal{F}_1 : $P(\Omega, \phi) = \int p(r, \phi) e^{-j\Omega r} dr,$
- TF inverse 1D \mathcal{F}_1^{-1} : $p(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int P(\Omega, \phi) e^{j\Omega r} d\Omega,$
- TF 2D \mathcal{F}_2 : $F(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy,$
- TF inverse 2D \mathcal{F}_2^{-1} : $f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint F(\omega_x, \omega_y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y.$

Avec ces définitions, on peut montrer les relations analytiques suivantes :

$$\begin{aligned} f &= \mathcal{B} \mathcal{H} \mathcal{D} \mathcal{R} f = \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} |\Omega| \mathcal{F}_1 \mathcal{R} f = \mathcal{C}_1 \mathcal{R} f \\ &= \mathcal{F}_2^{-1} |\Omega| \mathcal{F}_2 \mathcal{B} \mathcal{R} f = \mathcal{C}_2 \mathcal{B} \mathcal{R} f \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_1 = \mathcal{F}_1^{-1} |\Omega| \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{F}_2^{-1} |\Omega| \mathcal{F}_2$ sont des opérateurs de convolution :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 p(r, \phi) &= (h_1 \star p)(r, \phi), \quad h_1(r) = \int |\Omega| e^{-j\Omega r} dr \\ \mathcal{C}_2 b(x, y) &= (h_2 \star b)(x, y), \quad h_2(x, y) = \iint \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy. \end{aligned}$$

Finalement, il faut aussi mentionner une autre relation connue sous le nom de *théorème coupe-projection* :

$$F(\omega_x, \omega_y) = P(\Omega, \phi) \quad \text{pour} \quad \omega_x = \Omega \cos \phi \quad \text{et} \quad \omega_y = \Omega \sin \phi \quad (12.6)$$

qui se trouve au cœur d'un grand nombre de techniques d'inversion en tomographie et qui transforme le problème de l'inversion de la TR en un problème de *synthèse de Fourier* [MOH 88]. Ces relations résument les différents algorithmes qui sont utilisés pour obtenir des solutions approchées pour l'inversion de la TR, donc pour le problème de la reconstruction d'image en tomographie X et qui sont résumés schématiquement ici :

- inversion directe de la TR :

$$p(r, \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{D}} \rightarrow \bar{p}(r, \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{H}} \rightarrow g(r', \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{B}} \rightarrow f(x, y)$$

- RP des projections filtrées :

$$p(r, \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}_1} \rightarrow \boxed{\text{filtre } |\Omega|} \rightarrow \boxed{\mathcal{F}_1^{-1}} \rightarrow g(r', \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{B}} \rightarrow f(x, y)$$

- filtrage par convolution et RP :

$$p(r, \phi) \rightarrow \boxed{\text{filtre 1D } h_1(r)} \rightarrow g(r', \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{B}} \rightarrow f(x, y)$$

- RP suivie d'un filtrage en 2D :

$$p(r, \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{B}} \rightarrow b(x, y) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}_2} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{filtre} \\ |\Omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \end{array}} \rightarrow \boxed{\mathcal{F}_2^{-1}} \rightarrow f(x, y)$$

- RP suivie d'un filtrage par convolution en 2D :

$$p(r, \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{B}} \rightarrow b(x, y) \rightarrow \boxed{\text{filtre 2D } h_2(x, y)} \rightarrow f(x, y)$$

- remplissage, interpolation dans le domaine de Fourier et TF inverse 2D :

$$p(r, \phi) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}_1} \rightarrow P(\Omega, \phi) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{interpolation} \\ \omega_x = \Omega \cos \phi \\ \omega_y = \Omega \sin \phi \end{array}} \rightarrow F(\omega_x, \omega_y) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}_2^{-1}} \rightarrow f(x, y)$$

Notons cependant que la mise en œuvre numérique de ces méthodes se heurte à deux difficultés :

- les projections sont à support limité, en angles et en nombre fini ; les intégrales sont alors approchées par des sommes et les différentes transformées sont approchées par leurs versions discrètes ;
- l'image finale est souvent représentée en coordonnées cartésiennes sous forme de pixels ou voxels ; il y a donc forcément une interpolation à faire dans l'étape centrale de RP. Cette étape d'interpolation est plus explicite dans les méthodes de synthèse de Fourier, qui passent par le domaine de Fourier. Cette interpolation est elle-même un problème inverse. Elle nécessite une information *a priori* sur l'objet, souvent occultée dans ces algorithmes ;
- nous n'avons pas mentionné les méthodes spécifiques qui, utilisant certaines propriétés de l'objet $f(x, y)$, transforment le problème de l'inversion de la TR en l'inversion d'une autre transformée, souvent de dimension inférieure. A titre d'exemple, si l'objet a une symétrie de révolution ($f(x, y) = f(\rho)$ et $p(r, \phi) = p(r)$), le problème peut se ramener à l'inversion de la transformée d'Abel en une dimension :

$$p(r) = \int_0^r \frac{f(\rho)}{\sqrt{r-\rho}} d\rho.$$

12.4. Méthodes analytiques 3D

Une première approche pour la reconstruction 3D est d'effectuer des reconstructions successives de tranches 2D en s'appuyant sur les techniques de reconstruction précédentes à partir de projections obtenues sur des capteurs linéaires de type barrette. Mais cela est délicat à mettre en œuvre pratiquement, car il faut réaliser successivement autour de l'objet des rotations de l'ensemble de détection, puis des translations d'une épaisseur de tranche.

Ainsi, pour un système d'acquisition associant une source X à un capteur linéaire, une géométrie d'acquisition hélicoïdale a été proposée : pendant que le système d'acquisition est en rotation, le lit du patient se déplace à vitesse constante. A condition d'avoir au moins un demi-tour à un tour d'acquisition pour un déplacement d'une épaisseur de tranche de reconstruction, les techniques de reconstruction peuvent être adaptées pour reconstruire un objet 3D. A la différence de la géométrie tranche par tranche, il faut ici tenir compte du fait qu'une projection intervient dans plusieurs tranches à reconstruire [CRA 90, KAL 95]. Afin d'accélérer le temps d'acquisition, les systèmes actuels évoluent vers les capteurs multilignes ou même bidimensionnels. Le problème d'intersection de plusieurs tranches par un rayon d'acquisition est alors encore plus délicat.

Dans certaines configurations, l'ensemble de la zone de reconstruction peut être appréhendé par un détecteur 2D. Les algorithmes de reconstruction analytiques doivent prendre en compte la géométrie conique, c'est-à-dire qu'un rayon de projection traverse plusieurs tranches de l'objet à reconstruire. Des algorithmes ont été proposés pour ce type de géométrie : [FEL 84] convient pour des angles d'ouverture faibles des faisceaux et [GRA 91] permet de traiter des angles d'ouverture plus importants.

12.5. Limitations des méthodes analytiques

Les méthodes analytiques ont été utilisées avec succès en imagerie médicale, tandis que leur utilisation reste plus limitée dans d'autres applications telles que le contrôle non destructif. Ce constat s'explique par des contraintes d'acquisition plus sévères : en contrôle non destructif, les angles d'incidence, le nombre de mesures et le rapport signal-sur-bruit (RSB) sont souvent limités. Il en résulte que les solutions analytiques sont rarement satisfaisantes. La figure 12.4 illustre ces difficultés.

Il est aussi à mentionner que même en imagerie médicale, pour minimiser la quantité de rayons X envoyés sur le malade, on cherche à limiter le nombre de projections en optimisant le système d'acquisition. C'est le cas, par exemple, de la tomographie hélicoïdale, pour laquelle les méthodes traditionnelles ne peuvent pas être appliquées directement. Pour compenser le nombre de données plus faible, il faut ajouter de l'information *a priori*, ce qui signifie

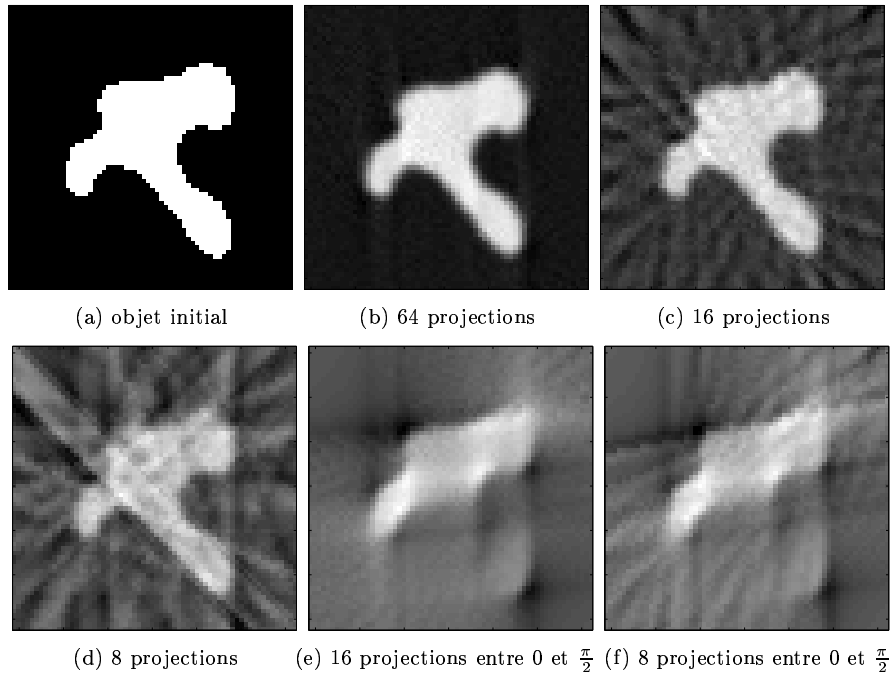


Figure 12.4. Cinq cas de reconstruction par RP filtrée en 2D : 64, 16 et 8 projections réparties entre 0 et π et 16 et 8 projections réparties entre 0 et $\pi/2$

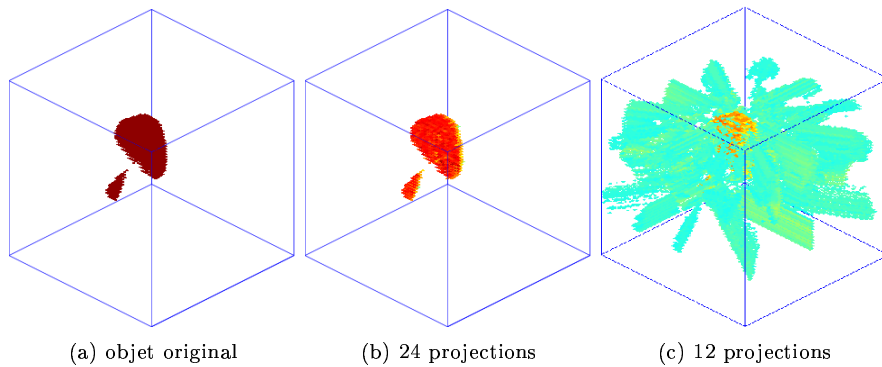


Figure 12.5. Deux cas de reconstruction par RP filtrée en 3D : 24 et 12 projections, réparties entre 0 et 2π autour de l'objet

développer des méthodes plus spécifiques pour une classe d'objets à examiner : objets à variations douces, objets plus piqués, objets continus ou constants par morceaux, objets binaires, objets composés de formes géométriques (ellipses

ou polygones en 2D, ellipsoïdes ou polyèdres en 3D), etc. Les méthodes analytiques ne sont pas adaptées à cette introduction d'information *a priori*. Cette dernière doit s'appuyer sur un formalisme de description de l'objet facilitant son introduction. La modélisation discrète apparaît alors la mieux adaptée.

12.6. Approche discrète de la reconstruction

Les données étant en nombre fini et les calculs se faisant numériquement, il n'y a pas d'alternative à la discrétisation du problème, au sens large. Trois approches sont possibles :

- représenter l'objet par un modèle paramétrique approprié ; modéliser le lien qu'il y a entre les données et les paramètres de ce modèle et les estimer directement à partir des données ;
- modéliser l'image en la projetant sur une base de fonctions appropriées avec un nombre raisonnable de coefficients à estimer ;
- discrétiser l'objet par un ensemble de pixels ou de voxels à la résolution la plus fine souhaitée et apporter de l'information *a priori* adaptée à la nature de l'objet examiné : champ à variation continue ou continue par morceau, impulsif, binaire, etc.

Un exemple de méthodes basées sur la première approche est la modélisation de l'objet par superposition d'un nombre fini d'ellipsoïdes et estimation par moindres carrés ou par maximum de vraisemblance de ses paramètres $\{(x_i, y_i, z_i), (a_i, b_i, c_i), (\theta_i, \phi_i), f_i\}$. La principale difficulté se trouve dans le fait que la relation entre les données et ces paramètres n'est pas linéaire (bien qu'explicite et analytique) ; on doit donc faire appel à des techniques d'optimisation non triviales pour le calcul de la solution.

Parmi les trois approches énoncées, les deux dernières ont un point commun : la projection de l'objet $f(x, y)$ sur une base de fonctions :

$$f(x, y) \simeq \sum_{n=1}^N f_n b_n(x, y).$$

Dans le dernier cas, ce sont des indicatrices de supports des pixels ou des voxels (splines d'ordre zéro). Cette projection permet de transformer le problème à la résolution d'un système d'équations linéaires :

pour $i = 1, \dots, M_1 ; j = 1, \dots, M_2,$

$$\begin{aligned} p(r_j, \phi_i) &\simeq \iint f(x, y) \delta(r_j \cos \phi_i - r_j \sin \phi_i) dx dy \\ &= \sum_{n=1}^N f_n \iint b_n(x, y) \delta(r_j \cos \phi_i - r_j \sin \phi_i) dx dy. \end{aligned}$$

En réorganisant et en renommant les données sous la forme $y_m = p(r_j, \phi_i)$, $m = (i - 1) \times M_1 + j$, on se ramène à $\mathbf{y} \simeq \mathbf{H}\mathbf{f}$, où $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_M]^T$ et $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_N]^T$ sont des vecteurs colonnes contenant respectivement les données et les coefficients inconnus de la décomposition, et \mathbf{H} est la matrice d'éléments :

$$H_{mn} = \iint b_n(x, y) \delta(r_j \cos \phi_i - r_j \sin \phi_i) dx dy,$$

où m correspond à l'indice de l'observation $p(r_j, \phi_i)$. Le problème se ramène alors à l'obtention d'une solution approchée satisfaisante pour une équation du type $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{b}$, où \mathbf{b} représente à la fois les erreurs liées aux différentes approximations et le bruit de mesure proprement dit. On peut alors utiliser l'ensemble des méthodes exposées dans les chapitres précédents tout en profitant de la structure particulière de la matrice \mathbf{H} et des modèles spécifiques pour le bruit \mathbf{b} . Nous en envisagerons certaines par la suite.

Bien entendu, le choix des fonctions de base $b_n(x, y)$ (pixels, pixels naturels, fonctions harmoniques, ondelettes, etc.) a des conséquences importantes sur la structure et les propriétés de la matrice \mathbf{H} et sur la signification et la complexité de calcul de ses éléments.

Choix des fonctions de base

On peut distinguer deux approches : soit la base est choisie en fonction d'un *a priori* sur l'objet, indépendamment de la géométrie (par exemple les pixels ou les voxels), soit elle est induite par la géométrie (par exemple les pixels naturels) [GAR 87]. Dans le premier cas, les éléments de \mathbf{f} peuvent avoir une signification physique, mais le calcul des éléments de la matrice \mathbf{H} est souvent plus coûteux. Dans le deuxième cas, ce calcul est moins coûteux mais la base n'est pas forcément orthogonale et complète et il est plus difficile de donner une signification physique aux éléments de \mathbf{f} .

Dans le premier cas, on peut encore distinguer trois catégories de fonctions : fonctions globales (par exemple série de Fourier), fonctions locales (par exemple des splines) et fonctions hybrides (par exemple des ondelettes).

Dans tous ces cas, la signification des éléments de \mathbf{f} dépend de ce choix. De même, la signification des éléments et la structure de la matrice \mathbf{H} dépendent de ce choix et de la géométrie de l'acquisition des projections. Par exemple, en géométrie conique, pour des données complètes (couverture angulaire uniforme entre 0 et 2π), la matrice \mathbf{H} aura une structure bloc-circulante.

Par la suite, pour présenter le principe des méthodes d'inversion, nous nous placerons dans le cas général sans prendre en compte cette particularité. Bien entendu, lors de la mise en œuvre, il faut absolument la prendre en compte pour obtenir des algorithmes avec des coûts de calcul raisonnables.

12.7. Choix de critère et méthodes de reconstruction

Comme nous venons de le voir, la formulation discrète du problème nous amène à rechercher une solution satisfaisante $\hat{\mathbf{f}}$ pour $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{b}$. La matrice \mathbf{H} est de grandes dimensions et souvent très mal conditionnée, voir singulière. Son conditionnement dépend particulièrement du choix de la base pour la décomposition de l'objet, de la géométrie et du rapport relatif entre le nombre de données indépendantes et le nombre de paramètres décrivant l'objet. Dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'il est souvent illusoire de penser obtenir une solution satisfaisante au problème en recherchant une solution exacte $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}$, une solution des moindres carrés $\arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2$, ou même une solution inverse généralisée $\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{y}$. On ne peut obtenir une solution satisfaisante qu'en introduisant, d'une manière ou d'une autre, de l'information *a priori* sur la solution. Ceci peut se faire au travers d'un choix judicieux des fonctions de base, de telle sorte que l'objet puisse réellement être décrit par un faible nombre de paramètres, qui sont simplement estimés au sens des moindres carrés. Mais cette approche reste trop restrictive et spécifique : il faut construire une base de fonctions pour un objet particulier. L'alternative, lorsque ces fonctions sont choisies d'une manière indépendante de l'opérateur (pixels ou voxels par exemple), est l'approche de régularisation permettant de traduire des *a priori* plus génériques.

Dans ce qui suit, nous nous focaliserons plutôt sur les méthodes qui définissent la solution comme l'optimiseur d'un critère régularisé. On peut alors distinguer trois catégories de solutions :

- 1) celles définies comme le minimiseur sans contrainte d'un critère composite :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} J(\mathbf{f}) = Q(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{f}) + \lambda \mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{f}^0)$$

où Q et \mathcal{F} sont généralement deux distances. Différentes expressions pour Q et \mathcal{F} peuvent être obtenues en fonction des hypothèses sur la nature du bruit, sur les données et sur la nature de l'objet. Un exemple classique est $J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \|\mathbf{D}\mathbf{f}\|^2$, où \mathbf{D} est un opérateur matriciel de dérivation pour imposer la douceur de la solution. Dans ce cas, $\hat{\mathbf{f}}$ a une expression analytique :

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y},$$

qui a une interprétation en termes de méthodes analytiques si l'on remarque que \mathbf{H}^T correspond à une opération de RP et $(\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}$ à une opération de filtrage en 2D ;

- 2) celles définies comme le minimiseur sous contrainte d'un critère simple :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{f}^0) \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$

où \mathcal{F} est aussi généralement une distance ou une mesure de divergence entre \mathbf{f} et une solution par défaut \mathbf{f}^0 . Un exemple classique est $\mathbf{f}^0 = 0$ et $\mathcal{F}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{D}\mathbf{f}\|^2$. La solution, dans ce cas aussi, a une expression analytique :

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{y},$$

qui équivaut à une opération de RP des projections filtrées. Un autre exemple classique consiste à choisir :

$$\mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{f}^0) = KL(\mathbf{f}, \mathbf{f}^0) = \sum_j f_j \ln f_j / f_j^0 + f_j - f_j^0$$

où $KL(\mathbf{f}, \mathbf{f}^0)$ est la mesure de divergence de Kullback-Leibler de \mathbf{f} par rapport à \mathbf{f}^0 . On retrouve alors les méthodes dites à maximum d'entropie ;

3) celles définies comme le minimiseur d'un critère probabiliste :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \bar{C}(\tilde{\mathbf{f}})$$

où $\bar{C}(\tilde{\mathbf{f}})$ est l'espérance d'une fonction de coût $C(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{f})$ par rapport à la loi de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{f} | \mathbf{y})$:

$$\bar{C}(\tilde{\mathbf{f}}) = \int C(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{f}) p(\mathbf{f} | \mathbf{y}) d\mathbf{f}$$

C'est le choix de cette fonction de coût qui nous ramène à différentes structures d'estimation (cf. paragraphe ??). Avec une hypothèse gaussienne pour les lois du bruit et de l'objet et un coût quadratique, on retrouve les deux solutions précédentes. Mais cette approche probabiliste nous permet d'aller au-delà des solutions déterministes au travers d'autres choix pour les lois *a priori* et d'autres fonctions de coût, ou encore à travers la notion de *marginalisation*.

Types d'estimateurs

Dans l'approche probabiliste bayésienne, suivant le choix de la fonction de coût $C(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{f})$, on obtient différentes expressions pour l'estimateur $\hat{\mathbf{f}}$ en fonction des données. Parmi ces estimateurs, on peut noter les suivants :

– maximum *a posteriori* (MAP) :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f} | \mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f}, \mathbf{y}) ;$$

– moyenne *a posteriori* (MP) :

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbb{E}(\mathbf{f} | \mathbf{y}) = \int \mathbf{f} p(\mathbf{f} | \mathbf{y}) d\mathbf{f} = \frac{\int \mathbf{f} p(\mathbf{f}, \mathbf{y}) d\mathbf{f}}{\int p(\mathbf{f}, \mathbf{y}) d\mathbf{f}} ;$$

- maximum de la loi *a posteriori* marginale (MAP marginal ou MPM pour *Marginal Posterior Mode*) :

$$\hat{f}_j = \arg \max f_j p(f_j | \mathbf{y}).$$

Un des éléments de choix entre ces différents estimateurs est le coût de calcul. En effet, on peut remarquer que, suivant le type d'estimateur choisi, on a à effectuer soit une optimisation soit une intégration. L'optimisation est soit multivariée comme dans le cas du MAP, soit scalaire comme dans le cas du MAP marginal. Notons aussi que dans le cas du MAP marginal, il y a une étape d'intégration qui est le calcul de la loi marginale [BOU 96, DIN 90, GEM 87, SAQ 98].

Excepté le cas linéaire gaussien, il est souvent difficile de trouver des expressions analytiques pour ces intégrales et les critères à optimiser sont non quadratiques. Il est alors nécessaire d'apporter une attention particulière aux aspects intégration et optimisation. C'est pourquoi, dans les deux paragraphes qui suivent, nous décrivons un certain nombre d'algorithmes qui implantent ces différents estimateurs.

12.8. Algorithmes de reconstruction

On peut définir un algorithme de reconstruction comme une suite d'opérations que l'on effectue sur des projections pour construire une image. Un algorithme qui se contente de cette définition sans préciser la méthode sur laquelle est basée l'algorithme ou sans préciser les propriétés des images que l'on obtiendrait en l'utilisant n'a pas grande valeur. C'est pourquoi nous nous limitons ici aux algorithmes qui optimisent un critère déterministe ou probabiliste. Dans un premier paragraphe, nous donnons une présentation synthétique des algorithmes d'optimisation qui sont utilisables particulièrement pour les critères convexes, et dans un deuxième paragraphe, nous présentons très brièvement des algorithmes utilisant des critères probabilistes.

12.8.1. Algorithmes d'optimisation pour les critères convexes

Nous avons vu qu'une famille importante de méthodes de résolution d'un problème inverse définit une solution au problème en minimisant un critère du type moindres carrés $J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$, moindres carrés régularisés $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda\Phi(\mathbf{x})$ ou, d'une manière plus générale, $Q(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, avec Q et \mathcal{F} deux distances ou deux mesures de divergence. De même dans les approches probabilistes, on retrouve des critères du genre MAP $J(\mathbf{x}) = -\ln p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ ou MAP marginal $J(x_j) = -\ln p(x_j | \mathbf{y})$. Dans ce paragraphe, nous présentons de façon synthétique des algorithmes d'optimisation qui sont utilisables particulièrement pour les critères convexes. On peut subdiviser les critères convexes en trois groupes de généralité et de complexité crois-

santes : i) strictement convexe et quadratique, ii) continu, strictement convexe mais non quadratique, iii) continu, convexe mais éventuellement non dérivable en quelques points.

Dans le premier cas, la solution existe, elle est unique et est fonction linéaire des données ; le calcul de la solution peut se faire par n'importe quel algorithme de descente. On peut même obtenir une solution explicite et directe.

Dans le deuxième cas, la solution existe, elle est unique mais n'est pas une fonction linéaire des données et le calcul de la solution se fait facilement à l'aide de n'importe quel algorithme de descente.

Dans le troisième cas, en général, la solution existe, mais peut ne pas être unique. Son calcul nécessite quelques précautions et la solution n'est pas une fonction linéaire des données.

Rappelons qu'un critère non convexe peut être multimodal, ce qui signifie qu'il faut avoir recours à des algorithmes d'optimisation globale. La solution n'est en général pas une fonction linéaire des données et le calcul de la solution ne se fait pas facilement.

D'un point de vue algorithmique, on peut classer les algorithmes de calcul de la solution optimale d'abord en deux catégories : ceux modifiant l'ensemble des inconnues \mathbf{x} à chaque itération et ceux modifiant un seul élément x_j (ou un bloc d'éléments) à la fois. Les algorithmes de chacune de ces catégories sont encore subdivisés en deux : ceux utilisant l'ensemble des données \mathbf{y} à chaque itération et ceux n'utilisant qu'une donnée y_i (ou un bloc de données) à chaque itération.

Algorithmes du type gradient

Une famille importante d'algorithmes d'optimisation d'un critère remet à jour l'estimé $\mathbf{x}^{(k-1)}$ d'une manière additive dans une direction de descente (souvent la direction opposée à celle du gradient du critère).

Pour aller un peu plus dans le détail des méthodes de descente classiques en reconstruction tomographique, considérons le cas particulier où le critère à optimiser prend la forme générique :

$$J(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_i q_{y_i}(z_i) + \lambda \sum_j \phi_j(t_j),$$

avec $z_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x}$ et $t_j = [\mathbf{D}\mathbf{x}]_j = x_j - x_{j-1}$, où $\mathbf{a}_{i*}^T = [a_{i1}, \dots, a_{iN}]$ est la ligne i de la matrice \mathbf{A} , \mathbf{D} une matrice des différences finies, q_y et ϕ_j des fonctions convexes et croissantes sur \mathbb{R}^+ et décroissantes sur \mathbb{R}^- , et λ un paramètre de régularisation.

Afin de distinguer entre les différentes classes d'algorithmes mentionnées plus haut, nous utilisons les notations suivantes :

- pour les algorithmes qui, à chaque itération, utilisent l'ensemble des données \mathbf{y} et mettent à jour l'ensemble des inconnues \mathbf{x} , on note :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \left[\frac{\partial J(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial J(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial x_N} \right]^T = \mathbf{A}^T \mathbf{q}'_{\mathbf{y}}(z) + \lambda \mathbf{D}^T \boldsymbol{\phi}'(\mathbf{t})$$

le gradient de $J(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ par rapport à \mathbf{x} , avec $\boldsymbol{\phi}'(\mathbf{t}) = [\phi'_1(t_1), \dots, \phi'_N(t_N)]$ et $\mathbf{q}'_{\mathbf{y}} = [q'_{y_1}, \dots, q'_{y_M}]$;

- pour ceux qui n'utilisent qu'une seule donnée y_i mais qui mettent à jour l'ensemble des inconnues \mathbf{x} :

$$J(\mathbf{x} | y_i) = q_{y_i}(z_i) + \lambda \sum_j \phi_j(t_j),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} | y_i) = q'_{y_i}(z_i) \mathbf{a}_{i*} + \lambda \mathbf{D}^T \boldsymbol{\phi}'(\mathbf{t}) ;$$

- pour les algorithmes qui utilisent l'ensemble des données mais qui, à chaque itération, ne mettent à jour qu'une seule variable x_k :

$$J(x_k | \mathbf{y}; \mathbf{x}_{\setminus k}) = J(\mathbf{x} | \mathbf{y})$$

$$g(x_k | \mathbf{y}; \mathbf{x}_{\setminus k}) = \frac{\partial J(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial x_k} = \sum_i a_{ik} q'_{y_i}(z_i) + \lambda \sum_j d_{jk} \phi'_j(t_j) ;$$

- pour les algorithmes qui, à chaque itération, utilisent une seule donnée y_i et qui ne mettent à jour qu'une seule variable x_k :

$$J(x_k | y_i; \mathbf{x}_{\setminus k}) = q_{y_i}(z_i) + \lambda \sum_j \phi_j(t_j)$$

$$g(x_k | y_i; \mathbf{x}_{\setminus k}) = \frac{\partial J(x_k | y_i; \mathbf{x}_{\setminus k})}{\partial x_k} = a_{ik} q'_{y_i}(z_i) + \lambda \sum_j d_{jk} \phi'_j(t_j).$$

Nous allons maintenant examiner un certain nombre de cas particuliers utilisés en tomographie ; a_{ij} représente alors la longueur du trajet du rayon i dans le pixel j . Nous remarquerons que la plupart des algorithmes classiques en tomographie sont en fait des algorithmes de type gradient sur des critères de moindres carrés : $q_{y_i}(z_i) = (y_i - z_i)^2$, ou bien fondé sur une divergence de Kullback-Leibler : $q_{y_i}(z_i) = KL(y_i, z_i)$.

SIRT (Simultaneous Iterative Relaxation Techniques)

Proposé par [GIL 72], il s'agit d'un algorithme de type gradient opérant sur $J(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha^{(k)} \mathbf{D} \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

avec $\mathbf{D} = \text{Diag} \{1/\sum_i a_{ij}\}$. Pour le pas $\alpha^{(k)}$, différentes variantes sont envisageables : fixe, optimal...

Le coût de calcul de cet algorithme à chaque itération est principalement une projection \mathbf{Ax} et une RP $\mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{Ax})$. Lorsque le pas α est fixe, il doit vérifier $0 < \alpha \|\mathbf{DA}^T\mathbf{A}\| < 2$. Le mot *simultaneous* vient du fait que l'on utilise l'ensemble des données à chaque itération de l'algorithme.

ART (Algebraic Reconstruction Techniques)

Cet algorithme, très utilisé en tomographie, correspond à la minimisation de $J(\mathbf{x} | \mathbf{y}_i) = (\mathbf{y}_i - \mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x})^2$ par un algorithme de gradient à pas variable ou optimal :

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha^{(k)} \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x}^{(k-1)}}{\|\mathbf{a}_{i*}\|^2} \mathbf{a}_{i*}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 1 \bmod M,$$

avec $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. On peut aussi noter que, lorsque $\alpha^{(k)} = 1$, $\mathbf{x}^{(k)}$ s'obtient à partir de $\mathbf{x}^{(k-1)}$ dans la direction de projection de $\mathbf{x}^{(k-1)}$ sur le sous-ensemble défini par l'équation $\mathbf{y}_i = \mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x}$, $i = k \bmod M$. A chaque mise à jour de \mathbf{x} , seule une donnée est utilisée. Il existe aussi des versions dans lesquelles on impose certaines contraintes (par exemple la positivité) sur la solution à chaque itération. La structure ART est un cas particulier d'algorithmes de projections sur des ensembles convexes (POCS), originellement présentés par Kaczmarz [KAC 37].

Notons aussi que l'ordre d'utilisation des données a une importance cruciale dans les performances de l'algorithme. L'idée sous-jacente est qu'il est souhaitable que les mises à jour lors des itérations successives soient les plus indépendantes possibles [HER 93, MAT 96].

ART par blocs

L'ART modifie les valeurs de l'ensemble des pixels à partir de la RP des différences entre les valeurs d'un seul rayon de projection observé et calculé. Une variante consiste à rétroprojeter la différence pour tout un bloc de rayons de projections. L'équation de mise à jour devient alors :

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha^{(k)} \frac{\mathbf{A}_{i_k}^T (\mathbf{y}_{i_k} - \mathbf{A}_{i_k} \mathbf{x}^{(k-1)})}{\|\mathbf{A}_{i_k}^T \mathbf{A}_{i_k}\|},$$

où \mathbf{y}_{i_k} est un bloc de données et $\mathbf{A}_{i_k}^T$ la matrice correspondant aux équations des rayons de projection pour ce bloc.

L'ART correspond au cas où i_k est un scalaire et la S-ART correspond au cas où i_k représente l'ensemble des rayons d'une direction de projection. Herman [HER 93] a montré que la rapidité de la reconstruction pouvait être augmentée en choisissant une suite de blocs successivement orthogonaux. Ce type de méthode est appelée ART *Ordered Subset M*, où M indique le nombre de directions de projections par blocs.

Algorithmes du type ICD (Iterative Conditional Descent)

Il s'agit d'algorithmes de relaxation (chapitre 2, p. 50). Pour le cas basique $J(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2$, cette structure est équivalente à celle de l'algorithme de Gauss-Seidel [PAT 99].

Algorithme de Richardson-Lucy

Considérons le critère suivant :

$$J(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = KL(\mathbf{y}, \mathbf{Ax}) = - \sum_i y_i \ln \mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x} / y_i + y_i - \mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x},$$

pour lequel on a :

$$\frac{\partial J(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial x_j} = \sum_i a_{ij} \frac{y_i}{\mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x}} - 1, \quad \frac{\partial^2 J(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial x_j^2} = - \sum_i a_{ij}^2 \frac{y_i}{(\mathbf{a}_{i*}^T \mathbf{x})^2}.$$

L'approximation $(\partial^2 J(\mathbf{x} | \mathbf{y}) / \partial x_j^2)^{-1} \simeq -x_j / \sum_i a_{ij}$ fournit un algorithme de Newton approché qui s'écrit :

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} \frac{1}{\sum_i a_{ij}} \sum_i a_{ij} \frac{y_i}{\sum_\ell a_{i\ell} x_\ell^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad j = k \bmod N,$$

connu sous le nom d'algorithme de Richardson-Lucy [LUC 74, RIC 72]. On peut aussi l'interpréter comme un algorithme EM dans une approche probabiliste avec des lois poissonniennes [SHE 82], ou comme un algorithme de projection sur des ensembles convexes (POCS) en utilisant la mesure de Kullback-Leibler [SNY 92].

12.8.2. Algorithmes d'optimisation ou d'intégration

Les modèles probabilistes décrivent plus aisément les situations où l'image à reconstruire est une grandeur réelle continue, constante par morceaux, ou lorsqu'elle prend des valeurs discrètes. Un exemple type est la modélisation markovienne (cf. chapitre 7). On est alors souvent amené à optimiser un critère (estimateurs MAP ou MAP marginal), soit à calculer une moyenne *a posteriori* (estimateur MP). Nous avons déjà décrit un certain nombre d'algorithmes pour l'optimisation des critères, lorsque ces derniers sont convexes. Dans ce paragraphe, nous mentionnons plus particulièrement des algorithmes qui sont utilisés soit en optimisation de critères multimodaux, soit pour calculer des estimateurs du type MP.

Comme indiqué précédemment, les approches stochastiques conduisent à la construction d'une distribution de probabilité *a posteriori* du type $\exp\{-J(\mathbf{x})\}$ sur l'ensemble des reconstructions, qui traduit à la fois les termes d'attache aux données et de régularisation. La reconstruction est définie comme un estimateur issu de cette distribution : estimateur MAP (maximum de la distribution

de probabilité), estimateur MPM (maximum de la distribution *a posteriori* marginale), estimateur MP (moyenne de la distribution *a posteriori*), par exemple. Suivant le type d'*a priori* considéré (markovien, fonction non convexe), les estimateurs précédents ne peuvent pas être calculés directement à partir de la distribution, $\exp\{-J(\boldsymbol{x})\}$, mais ils sont déterminés par échantillonnage. A cet effet, deux types d'algorithmes sont principalement utilisés :

- l'échantillonneur de Gibbs est particulièrement bien adapté aux *a priori* de type markovien car l'expression des probabilités conditionnelles s'exprime alors simplement. A ce titre, il est présenté au chapitre 7, paragraphe 7.4.2. Par simulation d'une suite de configurations représentatives de la distribution de probabilité P , on peut estimer les marginales de P , et ainsi définir l'estimateur MPM du maximum de la marginale *a posteriori*. De même, cet algorithme permet d'estimer la moyenne de la distribution *a posteriori* ;
- l'algorithme de recuit simulé permet de construire une suite aléatoire dont la loi converge vers une distribution uniforme sur les minima de P . Il permet donc d'estimer le MAP (cf. chapitre 7, p. 191).

12.9. Modèles spécifiques pour les objets binaires

Les méthodes que nous avons présentées pour l'instant sont très générales et peuvent être appliquées dans la plupart des problèmes de reconstruction d'images. Mais, dans certaines applications, surtout en CND, on cherche à reconstruire l'image d'un défaut (poche d'air) dans un milieu homogène (métal). Le problème se ramène alors à la reconstruction d'un objet binaire. On peut distinguer trois catégories de méthodes traitant ce problème.

- 1) Les méthodes qui modélisent l'objet par un ensemble de voxels binaires [BOU 96] utilisent une modélisation markovienne pour l'image binaire et, finalement, estiment cette image en utilisant un des estimateurs que nous avons évoqués dans les paragraphes précédents. Dans ces méthodes, le modèle direct liant les projections aux voxels est linéaire, mais par contre, il est souvent difficile de prendre en compte l'information *a priori* de la fermeture des contours des défauts à l'aide d'un modèle markovien simple.
- 2) D'autres méthodes proposent une reconstruction directe du contour fermé de l'objet, soit en modélisant ce contour comme la solution d'une équation aux dérivées partielles (contours actifs, *Snakes*), soit en le modélisant comme le passage à zéro d'une fonction de dimension supérieure (méthodes dites par courbes de niveaux, ou *level-sets*) [SAN 96]. Les inconvénients majeurs de ces méthodes sont d'une part le coût de calcul élevé (par exemple à cause de la mise à jour de la fonction représentant le front d'onde dans la méthode *level-set*), d'autre part la mise en œuvre délicate et le manque d'outil pour le choix du pas dans l'évolution de ce front d'onde.

3) Enfin, il existe des méthodes qui modélisent le contour par des formes géométriques déformables dont les paramètres sont estimés à partir des données [AMI 93, BAT 98, HAN 94]. Plusieurs catégories de modèles géométriques ont été proposées : courbes ou surfaces elliptiques ou superquadratiques, harmoniques et courbes ou surfaces décrites par des splines. La première est trop simple et restrictive, la deuxième s'élargit et convient aux courbes et surfaces étoilées, la dernière est plus générale. La contrepartie est l'augmentation du nombre des paramètres nécessaires.

On trouve une comparaison de ces différentes méthodes dans un travail récent [MOH 97, SOU 00], ainsi qu'une méthode spécifique au cas où l'objet est modélisé par un polygone en 2D ou un polyèdre en 3D.

12.10. Illustrations

Le principal objectif de ces illustrations est de montrer ce que l'on peut attendre des différentes méthodes, surtout dans le cas d'un très faible nombre de projections à angles limités.

12.10.1. *Reconstruction en 2D*

Nous avons choisi un objet binaire de dimensions 128×128 (figure 12.6a), simulé cinq projections pour les angles $-\pi/4$, $-\pi/8$, 0 , $\pi/8$, $\pi/4$, ajouté un bruit blanc gaussien pour obtenir un RSB de 20 dB, puis nous avons utilisé ces données pour effectuer des reconstructions par différentes méthodes.

12.10.2. *Reconstruction en 3D*

Nous avons choisi un objet binaire de dimensions $128 \times 128 \times 128$ (figure 12.7). Neuf projections ont été uniformément réparties, soit entre 0 et π , soit entre 0 et $\pi/2$. Dans les deux cas, nous avons simulé des données sans et avec bruit (RSB de 20 dB). Nous avons ensuite testé différentes méthodes.

Les reconstructions par ART (figure 12.8) montrent les fortes perturbations induites par le bruit lorsque l'on ne régularise pas. Dans la reconstruction suivante, par ICM (figure 12.9), on a mis en œuvre une régularisation particulièrement bien adaptée au cadre binaire : un modèle d'Ising (cf. chapitre 7, p. 179), qui favorise la compacité des zones. Dans cette reconstruction, les effets du bruit sont significativement atténués ; en revanche, le pied du champignon est séparé du corps.

12.11. Conclusions

L'objectif de ce chapitre était de fournir une présentation synthétique des différentes méthodes de reconstruction en tomographie X en plaçant en avant

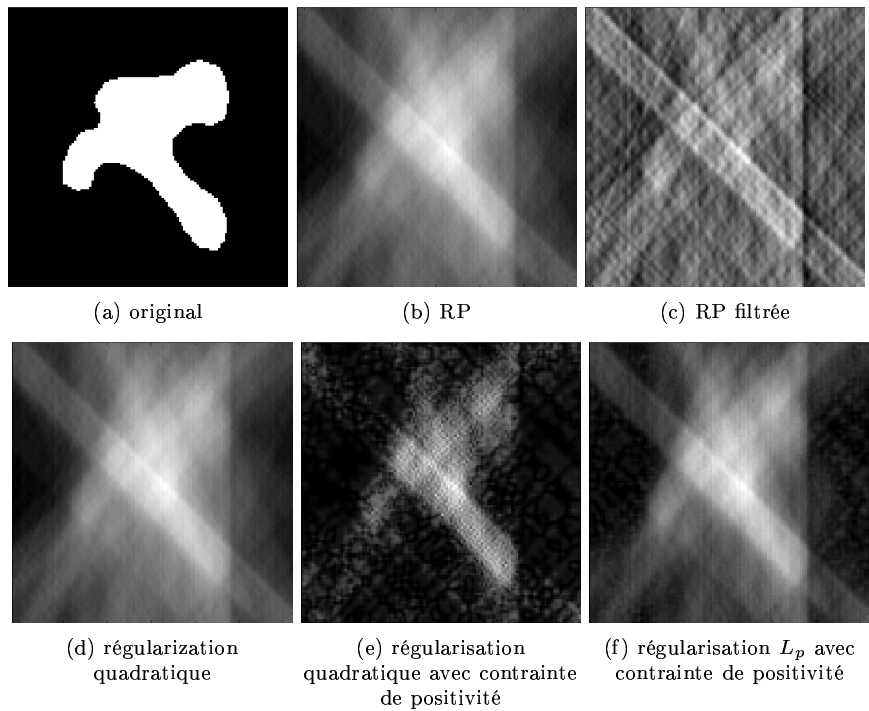


Figure 12.6. *Comparaison de méthode de reconstruction en 2D*

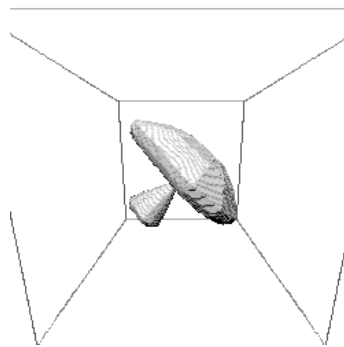


Figure 12.7. *Objet original pour les tests 3D*

des méthodes utilisables dans des situations difficiles : lorsque le nombre des projections est faible ou lorsque la couverture des angles est très restreinte, c'est-à-dire lorsque les méthodes analytiques classiques ne peuvent fournir des résultats satisfaisants. Ces méthodes plus sophistiquées nécessitent évidemment des coûts de calcul plus élevés, ce qui limite encore aujourd'hui leur utilisation

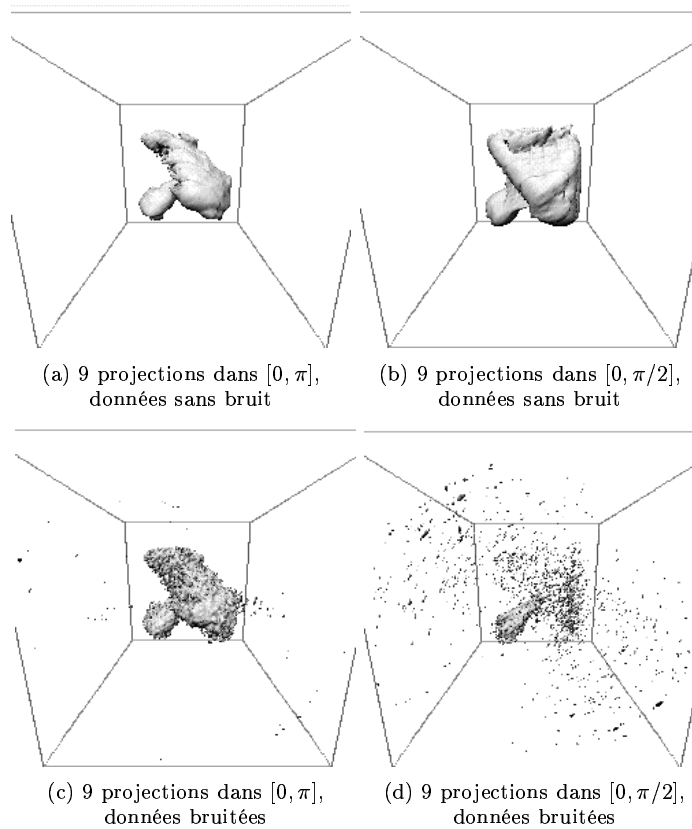


Figure 12.8. Reconstruction par ART sans régularisation. Un seuillage a été effectué pour les besoins de la visualisation

pratique dans les systèmes médicaux ou en usage courant en CND. Mais, à l'avenir, on cherchera toujours à réduire la quantité des radiations à envoyer sur un patient ou à diminuer le coût et le temps d'acquisition dans une application en CND, c'est pourquoi il sera nécessaire d'utiliser ces méthodes. Il reste cependant souhaitable de poursuivre le développement de méthodes plus spécifiques avec des coûts de calcul raisonnables pour des applications particulières. C'est le cas, par exemple, des méthodes récemment développées pour la reconstruction de la surface fermée d'un objet compact et homogène directement à partir des données radiographiques, sans passer par une étape de reconstruction voxelique.

12.12. Bibliographie

- [AM193] Y. AMIT et K. M. MANBECK, « Deformable template models for emission tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.*, 12(2), p. 260-268, 1993.

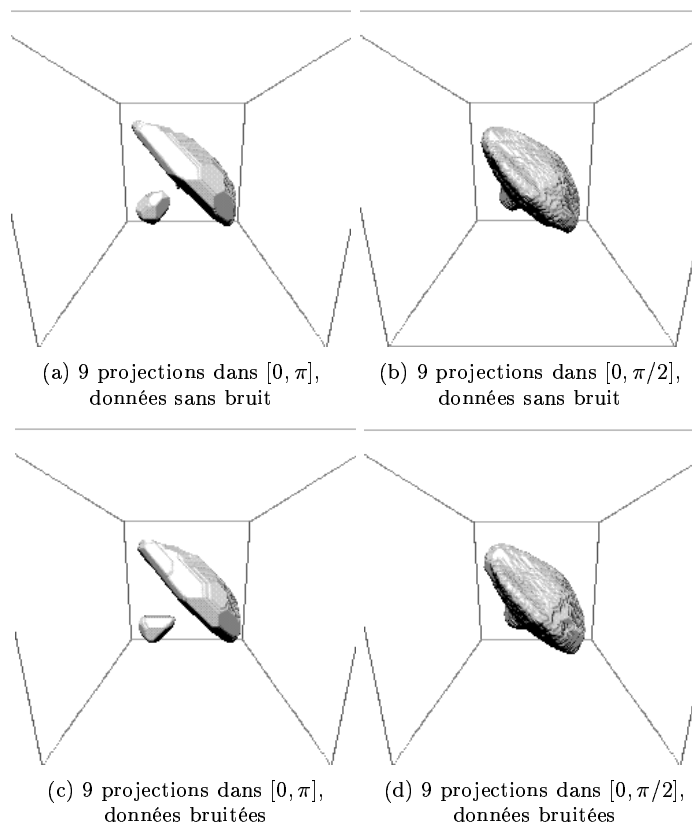


Figure 12.9. Reconstruction par ICM et régularisation par un modèle d'Ising

- [BAT 98] X. L. BATTLE, G. S. CUNNINGHAM et K. M. HANSON, « Tomographic reconstruction using 3D deformable models », *Phys. Med. Biol.*, 43, p. 983-990, 1998.
- [BOU 96] C. A. BOUMAN et K. D. SAUER, « A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization », *IEEE Trans. Image Processing*, 5(3), p. 480-492, 1996.
- [BRO 78] R. A. BROOKS, G. H. WEISS et A. J. TALBERT, « A new approach to interpolation in computed tomography », *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 2, p. 577-585, 1978.
- [BUD 79] T. F. BUDINGER, W. L. GULLBERG et R. H. HUESMAN, « Emission computed tomography », in G. T. HERMAN (dir.), *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Application*, p. 147-246, Springer Verlag, New York, 1979.
- [CHO 74] Z. H. CHO, « General views on 3-D image reconstruction and computerized transverse axial tomography », *IEEE Trans. Nuclear Sciences*, 21, p. 44-71, 1974.
- [CRA 90] C. R. CRAWFORD et K. F. KING, « Computed tomography scanning with simultaneous patient translation », *Med. Phys.*, 17(6), p. 967-982, 1990.

- [DEA 83] S. R. DEANS, *The Radon transform and some of its applications*, Wiley Interscience, New York, 1983.
- [DIN 90] J.-M. DINTEN, Tomographie à partir d'un nombre limité de projections : régularisation par champs markoviens, Thèse de doctorat, Université de Paris-sud, 1990.
- [FEL 84] L. A. FELDKAMP, L. C. DAVIS et J. W. KRESS, « Practical cone-beam algorithm », *J. Opt. Soc. Amer. (A)*, 1(6), p. 612-619, 1984.
- [GAR 87] L. GARNERO, Reconstruction d'images tomographiques à partir d'un ensemble limité de projections, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris-sud, 1987.
- [GEM 87] S. GEMAN et D. MCCLURE, « Statistical methods for tomographic image reconstruction », in *Proceedings of the 46th Session of the ICI, Bulletin of the ICI*, p. 5-21, 1987.
- [GIL 72] P. GILBERT, « Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections », *J. Theor. Biol.*, 36, p. 105-117, 1972.
- [GRA 91] P. GRANGEAT, « Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform », in G. T. HERMAN, A. K. LOUIS et F. NATTERER (dir.), *Mathematical Methods in Tomography*, p. 66-97, Springer Verlag, New York, 1991.
- [HAN 94] K. M. HANSON, G. S. CUNNINGHAM, G. R. J. JENNINGS et D. R. WOLF, « Tomographic reconstruction based on flexible geometric models », in *Proc. IEEE ICIP*, p. 145-147, Austin, TX, USA, novembre 1994.
- [HER 80] G. T. HERMAN, *Image reconstruction from projections. The fundamentals of computerized tomography*, Academic Press, New York, 1980.
- [HER 87] G. T. HERMAN, H. K. TUY, K. J. LANGENBERG et P. SABATIER, *Basic Methods of Tomography and Inverse Problems*, Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [HER 93] G. T. HERMAN et L. B. MEYER, « Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient », *IEEE Trans. Med. Imag.*, 12, p. 600-609, 1993.
- [KAC 37] S. KACZMARZ, « Angenaherte Auflosung von Systemen linearer Gleichungen », *Bull. Intern. Acad. Polon. Sci. Lett.*, A-35, p. 355-357, 1937.
- [KAL 95] W. A. KALENDER, « Principles and performance of spiral CT », in L. W. GOODMAN et J. B. FOWLKES (dir.), *Medical CT and Ultrasound : Current Technology and Applications*, p. 379-410, Advanced Medical Publ., Madison, 1995.
- [LUC 74] L. B. LUCY, « An iterative technique for the rectification of observed distributions », *Astron. J.*, 79(6), p. 745-754, 1974.
- [MAT 96] S. MATEJ et R. M. LEWITT, « Practical considerations for 3-D image reconstruction using spherically symmetric volume elements », *IEEE Trans. Med. Imag.*, 15, p. 68-78, 1996.
- [MOH 88] A. MOHAMMAD-DJAFARI et G. DEMOMENT, « Maximum entropy reconstruction in X ray and diffraction tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-7(4), p. 345-354, 1988.
- [MOH 97] A. MOHAMMAD-DJAFARI, « Shape reconstruction in X-ray tomography », in *Proc. SPIE*, p. 240-251, San Diego, CA, USA, juillet 1997.
- [NAT 80] F. NATTERER, « Efficient implementation of optimal algorithms in computerized tomography », *Math. Methods Appl. Sci.*, 2, p. 545-555, 1980.

- [PAT 99] M. PATRIKSSON, *Nonlinear programming and variational inequality problems. A unified approach*, Kluwer Academic Publ., Applied Optimization, Dordrecht, 1999.
- [RIC 72] W. H. RICHARDSON, « Bayesian-based iterative method of image restoration », *J. Opt. Soc. Amer.*, 62, p. 55-59, 1972.
- [SAN 96] F. SANTOSA, « A level-set approach for inverse problems involving obstacles », *ESAIM : COCV*, 1, p. 17-33, 1996.
- [SAQ 98] S. S. SAQUIB, C. A. BOUMAN et K. D. SAUER, « ML parameter estimation for Markov random fields with applications to Bayesian tomography », *IEEE Trans. Image Processing*, 7(7), p. 1029-1044, 1998.
- [SHE 82] L. A. SHEPP et Y. VARDI, « Maximum likelihood reconstruction for emission tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-1, p. 113-122, 1982.
- [SNY 92] D. L. SNYDER, T. J. SCHULZ et J. A. O'SULLIVAN, « Deblurring subject to nonnegativity constraints », *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(5), p. 1143-1150, 1992.
- [SOU 00] C. SOUSSEN, *Reconstruction 3D d'un objet compact en tomographie*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, 2000.