

Table des matières

Introduction <i>Jérôme IDIER</i>	13
I Problèmes et outils de base	23
1 Problèmes inverses et problèmes mal posés <i>Guy DEMOMENT, Jérôme IDIER</i>	25
1.1. Introduction	25
1.2. Exemple élémentaire	26
1.3. Problèmes mal posés	30
1.4. Inversion généralisée	34
1.5. Discrétisation et conditionnement	36
1.6. Conclusion	38
1.7. Bibliographie	39
2 Régularisation d'un problème mal posé : approches génériques <i>Guy DEMOMENT, Jérôme IDIER</i>	41
2.1. Régularisation	41
2.2. Méthodes de descente de critère	48
2.3. Choix du coefficient de régularisation	53
2.4. Bibliographie	56
3 Inversion dans un cadre probabiliste <i>Guy DEMOMENT, Yves GOUSSARD</i>	59
3.1. Inversion et inférence	59
3.2. Inférence statistique	60
3.3. Approche bayésienne de l'inversion	64
3.4. Liens avec les méthodes déterministes	66
3.5. Choix des hyperparamètres	67
3.6. Modèle <i>a priori</i>	69
3.7. Choix de critères	71
3.8. Le cas linéaire et gaussien	72
3.9. Bibliographie	76

II La déconvolution 79

4 Déconvolution linéaire et filtrage inverse
Guy LE BESNERAIS, Jean-François GIOVANNELLI, Guy DEMOMENT 81

4.1. Introduction 81

4.2. Déconvolution à temps continu 82

4.3. Discrétisation du problème 85

4.4. Déconvolution en bloc 91

4.5. Déconvolution récursive 102

4.6. Conclusion 112

4.7. Bibliographie 112

5 Déconvolution impulsionnelle
Frédéric CHAMPAGNAT, Yves GOUSSARD, Stéphane GAUTIER, Jérôme IDIER 115

5.1. Introduction 115

5.2. Pénalisation des réflectivités, déconvolutions L2LP/L2Hy 117

5.3. Déconvolution Bernoulli-gaussienne 122

5.4. Exemples de traitements et discussion 128

5.5. Extensions 132

5.6. Conclusion 134

5.7. Bibliographie 135

6 Déconvolution en imagerie
Jérôme IDIER, Laure BLANC-FÉRAUD 139

6.1. Introduction 139

6.2. La régularisation au sens de Tikhonov 140

6.3. Détection-estimation 146

6.4. Approche non quadratique 148

6.5. Critères augmentés semi-quadratiques 154

6.6. Application en déconvolution d'image 158

6.7. Conclusion 162

6.8. Bibliographie 163

III Problèmes et outils avancés 167

7 Modèles de Gibbs-Markov pour les images
Jérôme IDIER 169

7.1. Introduction 169

7.2. Cadre statistique bayésien 170

7.3. Les champs de Gibbs-Markov 171

7.4. Outils statistiques, échantillonnage stochastique 183

7.5.	Conclusion	192
7.6.	Bibliographie	193
8	Problèmes non supervisés <i>Xavier DESCOMBES, Yves GOUSSARD</i>	195
8.1.	Introduction et position du problème	195
8.2.	Champ directement observé	197
8.3.	Champ indirectement observé	203
8.4.	Conclusion	214
8.5.	Bibliographie	215
IV	Quelques applications	217
9	Application de la déconvolution au CND par ultrasons <i>Stéphane GAUTIER, Frédéric CHAMPAGNAT, Jérôme IDIER</i>	219
9.1.	Introduction	219
9.2.	Exemple de contrôle et difficultés d'interprétation	220
9.3.	Définition du modèle direct de convolution	222
9.4.	Déconvolution myope	223
9.5.	Traitement de données réelles	231
9.6.	Conclusion	239
9.7.	Bibliographie	240
10	Problèmes inverses en imagerie optique à travers la turbulence <i>Laurent MUGNIER, Guy LE BESNERAIS</i>	241
10.1.	L'imagerie optique en présence de turbulence	241
10.2.	Déconvolution « simple »	246
10.3.	Déconvolution par analyse de front d'onde (DECASO)	247
10.4.	Optique adaptative	255
10.5.	Synthèse d'ouverture optique	259
10.6.	Bibliographie	267
11	Caractérisation spectrale en vélocimétrie Doppler ultrasonore <i>Jean-François GIOVANNELLI, Alain HERMENT</i>	271
11.1.	Mesure de la vitesse en imagerie médicale	271
11.2.	Analyse spectrale adaptative	276
11.3.	Poursuite de moments spectraux	283
11.4.	Conclusion	293
11.5.	Bibliographie	294

12	Approche bayésienne pour les problèmes inverses	
12	Reconstruction tomographique pour un faible nombre de projections <i>Ali MOHAMMAD-DJAFARI, Jean-Marc DINTEN</i>	297
12.1.	Introduction	297
12.2.	Modèle de génération des projections	298
12.3.	Méthodes analytiques 2D	299
12.4.	Méthodes analytiques 3D	303
12.5.	Limitations des méthodes analytiques	303
12.6.	Approche discrète de la reconstruction	305
12.7.	Choix de critère et méthodes de reconstruction	307
12.8.	Algorithmes de reconstruction	309
12.9.	Modèles spécifiques pour les objets binaires	314
12.10.	Illustrations	315
12.11.	Conclusions	315
12.12.	Bibliographie	317
13	Tomographie de diffraction <i>Hervé CARFANTAN, Ali MOHAMMAD-DJAFARI</i>	321
13.1.	Introduction	321
13.2.	Modélisation du problème	322
13.3.	Discrétisation du problème direct	326
13.4.	Construction de critères pour l'inversion	330
13.5.	Résolution du problème inverse	334
13.6.	Conclusion	339
13.7.	Bibliographie	340
14	Imagerie à partir de données de faible intensité <i>Ken SAUER, Jean-Baptiste THIBAUT</i>	343
14.1.	Introduction	343
14.2.	Statistique des données d'imagerie de faible intensité	345
14.3.	Effets du faible taux de comptage poissonnien	350
14.4.	Implémentation et calcul des estimées bayésiennes	355
14.5.	Conclusion	360
14.6.	Bibliographie	360
	Index	368

Chapitre 13

Tomographie de diffraction

13.1. Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'utilisation de l'approche bayésienne pour la résolution du problème de *tomographie de diffraction*. Pour ce type de problèmes, les mesures recueillies, les ondes diffractées par un objet, dépendent de façon non linéaire des paramètres physiques de cet objet. Un grand nombre de travaux considèrent une approximation linéaire du phénomène de propagation – les plus connues étant les approximations de Born et de Rytov – mais nous ne poursuivrons pas dans cette voie par la suite. Nous insisterons au contraire sur la résolution du problème en prenant en compte le modèle non linéaire.

Pour un problème inverse non linéaire, si l'on considère une relation explicite entre les paramètres de l'objet \mathbf{x} et les mesures \mathbf{y} de la forme $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, l'inversion consiste à déduire des données mesurées \mathbf{y} les paramètres \mathbf{x} . Une approche naturelle pour résoudre le problème consiste à minimiser le critère des moindres carrés :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2.$$

Dans le cas des problèmes mal posés, comme cela a été illustré au chapitre 1, une telle solution ne convient pas du fait de sa grande sensibilité vis-à-vis de variations sur les mesures, celles-ci étant inévitablement entachées d'erreurs. Le cadre algébrique bayésien permet alors, comme dans le cas des problèmes inverses linéaires, de définir une solution régularisée à ce problème en prenant en compte un modèle probabiliste sur l'objet recherché.

La non-linéarité est par nature une non-propriété, on ne s'intéressera pas ici à une généralisation de la régularisation bayésienne pour les problèmes inverses non linéaires, mais nous insisterons au contraire sur les particularités du problème de tomographie de diffraction et leur exploitation pour la définition de

Chapitre rédigé par Hervé CARFANTAN et Ali MOHAMMAD-DJAFARI.

critères et leur optimisation. Nous présenterons donc les équations de propagation des ondes permettant de déduire un modèle direct intégral, sous forme de deux équations couplées. Nous décrirons la *méthode des moments*, méthode souvent utilisée pour discrétiser le modèle direct intégral et donnant un modèle algébrique se présentant encore comme deux équations couplées. L'estimation au sens du maximum *a posteriori* (MAP) nous permettra alors, à partir de ce modèle, de définir des solutions régularisées comme minimisant un certain critère. Ce critère est non convexe, ce qui est une conséquence de la non-linéarité du modèle direct.

La minimisation de critères nous permettra de présenter d'un même point de vue la plupart des méthodes utilisées en tomographie de diffraction. Dans un premier temps, nous présenterons des méthodes effectuant une optimisation locale de ces critères par linéarisations successives du modèle direct. Puis nous montrerons le lien avec des techniques visant à reconstruire simultanément les paramètres de l'objet et le champ dans le domaine de l'objet. Enfin, nous insisterons sur l'importance de l'utilisation de techniques d'optimisation globale dans les situations particulièrement difficiles où les critères possèdent des minima locaux.

13.2. Modélisation du problème

Le terme générique de *tomographie de diffraction* utilisé ici est relatif à un grand nombre de modalités d'imagerie pour lesquelles le phénomène mesuré est relatif à la diffraction d'une onde dans un milieu inhomogène. On considère que l'objet à imager est homogène suivant un de ses axes (symétrie cylindrique) afin de se ramener à un problème bidimensionnel ; de plus, on effectue des mesures dans un domaine D_M extérieur au domaine D_O dans lequel l'objet est présent, d'où le lien avec la tomographie classique à rayons X. Insistons également sur le fait que l'objectif est de construire une image (grille de valeurs) de caractéristiques physiques de l'objet à l'opposé d'un grand nombre de travaux qui s'intéressent uniquement aux contours de l'objet ou au champ dans le domaine de l'objet.

Nous ne présentons ici et ne considérerons par la suite que des applications des ondes électromagnétiques. Cependant, il est intéressant de noter qu'il existe de fortes similitudes avec certaines applications exploitant des ondes acoustiques (par exemple avec l'imagerie tomographique ultrasonore [KAK 87]).

13.2.1. Exemples d'applications de la tomographie de diffraction

Des applications d'une technique de tomographie de diffraction apparaissent dans de nombreux domaines tels que le génie biomédical, le contrôle non destructif de matériaux conducteurs ou l'exploration géophysique.

Imagerie micro-onde

Dans les années 1970, la tomographie à rayons X a permis d'imager le corps humain. L'effet nocif de tels rayons ionisants a motivé l'étude d'autres formes d'énergie telles que les micro-ondes (à faible puissance), les ultrasons et la résonance magnétique. Des travaux de recherche sur l'imagerie micro-onde active se sont ainsi largement développés depuis le début des années 1980 [BOL 83].

Le but d'une telle technique d'imagerie est de déterminer les caractéristiques de propagation d'un milieu inhomogène (le corps humain, ou du moins une partie), la conductivité $\sigma(\mathbf{r})$ et la permittivité diélectrique $\epsilon(\mathbf{r})$ variant spatialement ($\mathbf{r} \in D_O$). Ce milieu inhomogène est plongé dans un milieu homogène (de l'eau par exemple) de caractéristiques connues σ_0 et ϵ_0 . Les configurations géométriques envisagées (figure 13.1a) sont directement issues de celles de la tomographie à rayons X. Contrairement aux rayons X, les phénomènes de diffraction ne peuvent être négligés pour une telle modalité d'imagerie : les ondes ne peuvent plus être supposées se propager en ligne droite dans le milieu, ce qui complique largement le problème d'imagerie [KAK 87]. Les fréquences considérées pour une telle application vont de la centaine de MHz à quelques centaines de GHz.

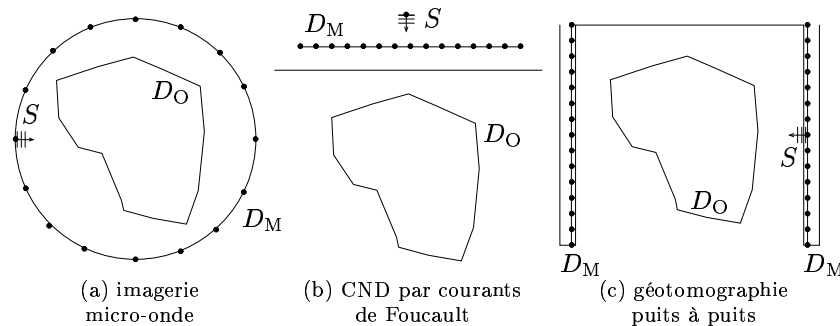


Figure 13.1. Différentes configurations de tomographie de diffraction : une onde plane émise à partir d'une source S se propage dans le domaine de l'objet D_O . Le champ diffracté est mesuré par des capteurs placés dans le domaine D_M

Contrôle non destructif de matériaux conducteurs par courants de Foucault

Le but du contrôle non destructif (CND) de matériaux conducteurs est de détecter et d'étudier des défauts dans ces matériaux. Dans un tel processus, une technique d'imagerie permet de caractériser les défauts et intervient postérieurement à une étape de détection. Pour cela, une onde électromagnétique est émise à partir d'un milieu homogène connu non conducteur (généralement l'air) de caractéristiques connues $\sigma = 0$ et ϵ_0 . Les mesures du champ qui s'est propagé dans le milieu conducteur (figure 13.1b) sont recueillies dans

ce même milieu homogène. La caractéristique physique à imager est la conductivité $\sigma(\mathbf{r})$ d'un éventuel défaut dans l'objet conducteur de caractéristiques connues ($\sigma_0 = 10^7$ S/m et ϵ_0) [ZOR 91]. La gamme de fréquences considérée va du KHz au MHz.

Exploration géophysique

La *géotomographie* s'est révélée être un outil intéressant en géophysique, par exemple pour la recherche pétrolière et pour le suivi d'extraction du pétrole. Un exemple d'application est la *tomographie de puits à puits* (*well to well tomography*), dans laquelle deux puits, encadrant une région à explorer, sont forés (figure 13.1c). Des ondes électromagnétiques sont émises à partir d'une source placée dans un des puits et les mesures sont recueillies par des capteurs situés dans les deux puits (réponses en réflexion et en transmission du milieu). Le but visé est d'imager le milieu en conductivité $\sigma(\mathbf{r})$ et en permittivité $\epsilon(\mathbf{r})$ [HOW 86]. Les fréquences considérées sont de l'ordre du MHz.

13.2.2. Modélisation du problème direct

Nous n'entrerons pas dans le détail du développement des équations intégrales permettant de modéliser le problème d'imagerie, mais nous insisterons sur les hypothèses prises en compte et la forme des équations couplées auxquelles on aboutit.

Equations de propagation dans un milieu inhomogène

Nous nous plaçons dans le cas d'ondes électromagnétiques, par exemple en tomographie micro-onde, sachant que des équations similaires peuvent être exprimées dans d'autres applications et pour des ondes acoustiques [COL 92].

Nous considérerons la propagation d'ondes électromagnétiques *planes*, en *régime harmonique* de pulsation ω dans des milieux *non magnétiques*. Un milieu inhomogène est noyé dans un milieu homogène ambiant (de caractéristiques connues; permittivité ϵ_0 , conductivité σ_0 , perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$). On peut se placer dans un cadre bidimensionnel en considérant l'objet homogène suivant un de ses axes (*symétrie cylindrique*) et une onde incidente polarisée suivant cet axe (configuration *magnétique transverse*) nous permet de travailler avec des champs scalaires. Dans ce cadre, les équations de Maxwell nous donnent pour ϕ , la composante du champ électrique suivant l'axe de l'objet :

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 J(\mathbf{r}) \quad (13.1)$$

où \mathbf{r} est le vecteur de position dans l'espace 2D, Δ le laplacien et J induit par la source. Le nombre d'onde $k^2(\mathbf{r}) = \omega^2\mu_0 (\epsilon(\mathbf{r}) + j\sigma(\mathbf{r})/\omega)$ de l'objet inhomogène en un point \mathbf{r} est relié à sa permittivité électrique $\epsilon(\mathbf{r})$ et sa conductivité $\sigma(\mathbf{r})$

(le milieu homogène ambiant étant lui caractérisé par son nombre d'onde k_0^2). On peut déduire de (13.1) une équation de propagation sous forme intégrale :

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \int_D \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (k^2(\mathbf{r}') - k_0^2) \phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (13.2)$$

dans laquelle ϕ_0 est le champ incident ; \mathcal{G} est la fonction de Green de l'espace libre qui s'écrit dans le cas bidimensionnel :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel d'ordre zéro et de première espèce.

Modélisation intégrale du problème direct

Nous venons de décrire les équations scalaires correspondant à la propagation des ondes dans un milieu inhomogène. Nous allons maintenant décrire le phénomène de propagation intervenant dans le problème d'imagerie. Pour cela, nous considérons la configuration géométrique en champ proche présentée à la figure 13.2.

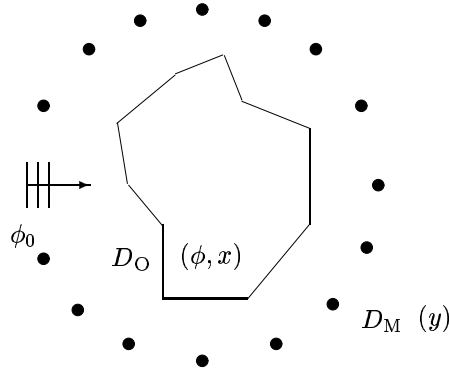


Figure 13.2. Configuration bidimensionnelle choisie

Les mesures sont recueillies par des capteurs placés en un ensemble discret de positions, noté D_M dans le milieu ambiant¹. Nous noterons dorénavant $y(\mathbf{r}_i)$ le champ diffracté sur les points de mesures $\mathbf{r}_i \in D_M$. Le champ total dans le domaine de l'objet sera noté $\phi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D_O$. L'objet est caractérisé par son contraste complexe $x(\mathbf{r}) = k^2(\mathbf{r}) - k_0^2$. Nous allons décrire les phénomènes de propagation des ondes, depuis la source jusqu'aux points de mesures, le champ

¹ Il est parfois nécessaire de recueillir les mesures à l'extérieur du milieu ambiant. Il n'est alors plus possible de travailler avec les fonctions de Green de l'espace libre et il faut prendre en compte au travers des fonctions de Green les interfaces entre les deux milieux (voir par exemple [ZOR 91] en CND par courant de Foucault).

incident dans le domaine de l'objet $\phi_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in D_O$ – correspondant à l'onde émise – étant connu.

En exploitant l'équation (13.2), le champ diffracté sur les points de mesures peut être écrit en fonction du contraste et du champ total dans l'objet :

$$y(\mathbf{r}_i) = \int_{D_O} \mathcal{G}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') x(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_i \in D_M. \quad (13.3)$$

Cette équation est souvent appelée équation *d'observation*. Le champ ϕ dans le domaine de l'objet vérifie une équation du même type :

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \int_{D_O} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') x(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in D_O, \quad (13.4)$$

parfois appelée *de couplage*. Notons que cette équation est implicite en ϕ .

Le problème direct est modélisé par la relation liant l'objet inhomogène $x(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in D_O$ au champ diffracté sur les points de mesure $y(\mathbf{r}_i)$, $\mathbf{r}_i \in D_M$ et s'écrit donc sous la forme des deux équations couplées (13.3-13.4). Ce modèle n'est pas linéaire car le champ diffracté dépend linéairement du produit du contraste et du champ dans le domaine de l'objet (équation (13.3)), ce champ dépendant lui-même du contraste (équation (13.4)).

Il n'existe pas, en règle générale, de formulation analytique de la solution du problème direct, mais il existe différentes méthodes numériques de résolution de ce problème [COL 92]. Nous présenterons section 13.3 la discrétisation de ce modèle direct sous forme intégrale et il s'en suivra de façon naturelle une méthode numérique de résolution du problème direct.

13.3. Discrétisation du problème direct

Un grand nombre de travaux en *physique mathématique* sur la résolution des problèmes inverses en général – et en particulier sur le problème de tomographie de diffraction – sont présentés dans un cadre fonctionnel. La discrétisation n'est effectuée qu'en ultime étape, pour calculer numériquement une solution définie de façon fonctionnelle. Citons par exemple Tarantola : « *This is a quite general conclusion in any inverse problem theory: discretization, if any, must be reserved for the final computations, and not for developing the formulae.* » [TAR 82] Au contraire, en *traitement statistique des données*, la discrétisation est généralement prise en compte dès le modèle direct, cadre que nous avons choisi ici et dont nous présenterons les avantages pour le problème considéré. Pour aboutir à un modèle algébrique, nous utiliserons la méthode des moments pour discrétiser les équations couplées (13.3-13.4), méthode que nous présentons brièvement.

13.3.1. *Choix d'un cadre algébrique*

Le choix délibéré de nous placer dans un cadre algébrique plutôt que fonctionnel est un point délicat à justifier, qui peut soulever de nombreux débats. Pour le problème posé ici, plusieurs arguments peuvent être avancés :

- les mesures sont effectuées avec un nombre fini de capteurs et sont donc par nature discrètes, alors que lorsque le problème est étudié dans un cadre fonctionnel, les mesures sont bien souvent supposées connues de façon continue autour de l'objet ;
- à part dans de rares cas particuliers où l'objet peut être paramétré de façon simple (par exemple si l'on sait que c'est un disque homogène), la solution sera calculée de façon numérique ;
- pour le problème de tomographie de diffraction, les équations non linéaires sont délicates à manipuler et il est intéressant de constater, comme nous le soulignerons au paragraphe 13.5.1, que plusieurs méthodes proposées dans un cadre fonctionnel à partir de raisonnements distincts amènent à des solutions fonctionnellement différentes mais numériquement identiques ;
- enfin, les équations à manipuler sont plus simples dans un cadre algébrique, même si elles ne sont pas linéaires et il est plus aisé de se focaliser sur le fait que le problème soit mal posé et sur la façon de le régulariser en introduisant des modèles *a priori* élaborés sur la solution recherchée. Notons que le cadre probabiliste peut également être appréhendé d'un point de vue fonctionnel comme cela est fait dans [TAR 87], mais les modèles deviennent alors délicats à manipuler en dehors du cas gaussien.

13.3.2. *La méthode des moments*

La *méthode des moments* est une méthode générique permettant de discrétiser des équations linéaires, afin de les résoudre numériquement lorsque leur résolution ne peut être effectuée dans le domaine fonctionnel. Une excellente synthèse sur cette méthode, montrant de plus que la plupart des techniques de discrétisation s'interprètent comme une méthode des moments, peut être trouvée dans [HAR 87].

Le cadre général d'utilisation de cette méthode est la résolution d'une équation fonctionnelle du type : $Lf = g$, avec L un opérateur linéaire, g une fonction connue et f la fonction inconnue à déterminer. L'objectif est de discrétiser cette équation afin d'aboutir à une relation matricielle de la forme $\mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}$ qui pourra être résolue numériquement. Pour cela, la fonction f est représentée comme une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions $\{b_1, b_2, \dots\}$, appelées *fonctions de base* :

$$f = \sum_i f_i b_i,$$

avec les coefficients f_i à déterminer. Une solution approchée, dans laquelle le nombre n de fonctions de base est fini, est considérée. L'équation linéaire à résoudre devient alors :

$$\sum_{i=1}^n f_i L b_i = g.$$

En projetant cette relation sur un ensemble de fonctions $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, appelées *fonctions de test*, l'équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad \text{avec } L_{i,j} = \langle t_i, L b_j \rangle \quad \text{et } g_i = \langle t_i, g \rangle ;$$

la matrice $\mathbf{L} = (L_{i,j})$ est de taille $n \times n$ et les vecteurs colonne \mathbf{f} et $\mathbf{g} = (g_i)$ sont de longueur n .

Le choix des fonctions de base et des fonctions de test est un problème délicat lors de l'utilisation de la méthode des moments. Il doit se faire sur des considérations pratiques, telles que la facilité de calcul des différents produits scalaires, mais aussi physiques pour prendre en compte la particularité du problème traité. Enfin, ces choix influenceront directement sur la structure de la matrice \mathbf{L} et donc sur la facilité de résoudre numériquement le problème algébrique. Remarquons que pour des fonctions de tests de la forme $t_i(r) = r^i$, $g_i = \int r^i g(r) dr$ est le moment d'ordre i de g , d'où le nom donné à cette méthode.

13.3.3. Discrétisation par la méthode des moments

La résolution du problème direct, c'est-à-dire le calcul du champ diffracté sur les points de mesure correspondant à une fonction de contraste donnée, ne rentre pas directement dans le cadre d'application de la méthode des moments, puisque la relation liant l'objet aux données n'est pas linéaire. Cependant, on peut appliquer cette méthode sur chacune des équations couplées (13.3-13.4). Nous reprenons ici la discrétisation appelée *Volume current method* dans [How 86] et souvent utilisée pour ce problème.

L'équation (13.4) est discrétisée en considérant un maillage carré du domaine de l'objet D_O et pour fonctions de base $\{b_i\}_{i=1..n_O}$ et fonctions de test $\{t_i\}_{i=1..n_O}$ les fonctions indicatrices sur les régions carrées D_i (pixels), de côté c , de D_O (ϕ , ϕ_0 et x sont alors supposés constants sur ces régions et représentés par des vecteurs colonne de longueur n_O). Ainsi, l'équation algébrique correspondant à (13.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\phi = \phi_0 + \mathbf{G}_O \mathbf{X} \phi, \quad (13.5)$$

dans laquelle \mathbf{X} est une matrice diagonale $\mathbf{X} = \text{Diag}\{x_i\}_{i=1..n_O}$ et \mathbf{G}_O est une matrice de taille $n_O \times n_O$ dont les éléments vérifient :

$$(\mathbf{G}_O)_{i,j} = \frac{1}{c^2} \int_{D_i} \int_{D_j} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

De même, la relation (13.3) s'écrit sous forme algébrique :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_M \mathbf{X} \phi, \quad \text{avec } \mathbf{y} = (y(\mathbf{r}_i))_{i=1 \dots n_M}, \quad (13.6)$$

où n_M est le nombre de points de mesure, \mathbf{G}_M une matrice de taille $n_M \times n_O$ dont les éléments s'écrivent :

$$(\mathbf{G}_M)_{i,j} = \frac{1}{c^2} \int_{D_M} \int_{D_j} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' t_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

avec t_i fonctions de test sur le domaine de mesure D_M .

Il est proposé dans [HOW86] d'approcher les intégrales de la fonction de Green en intégrant non pas sur les régions carrées D_i , mais sur des disques de surface équivalente. On dispose ainsi d'une formule analytique pour les intégrales et on évite l'utilisation de méthodes d'intégration numériques. Par cette approche, les erreurs de discrétisation peuvent être considérées comme négligeables si c est de l'ordre d'un dixième de la longueur d'onde du milieu homogène ambiant [HOW86].

Le modèle direct se présentait sous forme intégrale avec les équations couplées (13.3-13.4). On obtient sous forme algébrique les équations couplées (13.5-13.6). Ce modèle peut être exprimé sous une forme explicite liant directement l'objet aux mesures, sans que n'intervienne le champ dans le domaine de l'objet. En effet, pour un objet donné de contraste \mathbf{x} , l'équation (13.5) permet d'écrire le champ ϕ sous la forme :

$$\phi = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X})^{-1} \phi_0.$$

En reportant cette relation dans l'équation (13.6), la relation explicite liant \mathbf{x} à \mathbf{y} peut être déduite :

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad \text{avec } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_M \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X})^{-1} \phi_0. \quad (13.7)$$

Remarquons que pour résoudre le problème direct, l'équation (13.7) fait intervenir l'inversion d'une matrice, ou de façon équivalente (mathématiquement, mais pas en coût de calcul), l'équation (13.5) demande la résolution d'un système de n_O équations à n_O inconnues. Néanmoins, cette inversion ne pose pas de problèmes numériques, le système linéaire à résoudre étant bien conditionné.

Enfin, notons que ces relations ont été établies pour des vecteurs et des matrices à valeurs complexes. Il est parfois utile de se placer dans le cas de variables réelles, en séparant parties réelle et imaginaire ; dans ce cas, on peut obtenir exactement les mêmes relations matricielles en modifiant la définition des matrices \mathbf{G}_M et \mathbf{G}_O . De même, on peut généraliser ces relations au cas multisource où l'on considère des mesures recueillies pour des sources d'émission distinctes [CAR96].

13.4. Construction de critères pour l'inversion

Nous disposons maintenant d'un modèle algébrique du problème direct, permettant de calculer le champ diffracté \mathbf{y} sur les points de mesures à partir de la connaissance du contraste \mathbf{x} de l'objet, par l'intermédiaire éventuel du calcul du champ sur l'objet ϕ . Nous allons maintenant nous intéresser à la résolution du problème inverse qui consiste à reconstruire le contraste \mathbf{x} (objet) à partir de mesures effectuées du champ diffracté \mathbf{y} (données). Comme la plupart des problèmes inverses, ce problème est mal posé. En particulier, la solution est très instable vis-à-vis de variations, même très faibles, des données [COL 92]; de plus, même dans un cadre fonctionnel lorsque les mesures sont supposées connues en tout point d'un domaine D_M continu entourant l'objet, l'unicité de la solution n'est pas démontrée. Nous allons, à partir de ce modèle algébrique, nous appuyer sur le cadre bayésien pour construire des critères définissant des solutions régularisées de ce problème inverse.

Pour cela, nous devons disposer d'un modèle pour les erreurs perturbant les mesures (erreurs de modèle, erreur de discrétisation et bruit de mesures). Ne disposant pas comme dans certaines applications d'information particulière sur la statistique du bruit de mesure (cf. par exemple le chapitre 14), nous considérons ces erreurs blanches gaussiennes circulaires centrées de variance σ_M^2 . Comme précisé à la section 3.2, il ne s'agit pas d'affirmer que ces perturbations sont gaussiennes; mais cette « hypothèse » gaussienne est le choix le moins compromettant que nous puissions faire pour la distribution des erreurs, considérées de valeur moyenne nulle et de variance finie.

Nous devons également disposer d'un modèle *a priori* sur l'objet. Remarquons que l'objet à imager \mathbf{x} est à valeur complexe. Étant donnée la signification physique particulière des parties réelle (liée à la permittivité de l'objet) et imaginaire (liée à sa conductivité), nous considérons ici une densité de probabilité séparable :

$$f(\mathbf{x}) = f_R(\operatorname{Re}\{\mathbf{x}\}) f_I(\operatorname{Im}\{\mathbf{x}\}).$$

Cherchant à reconstruire des images constituées de zones homogènes, nous considérons des densités correspondant à un modèle de Gibbs-Markov, comme présenté au chapitre 7, s'écrivant sous la forme² :

$$f(\mathbf{x}) \propto \exp\{-\Phi(\mathbf{x})/T\}.$$

Néanmoins, il est prudent, dans un premier temps, de se contenter d'une fonction Φ convexe pour ne pas augmenter les difficultés de minimisation dues

² Par abus, nous écrirons désormais la densité de probabilité de l'objet sous cette forme, la séparation entre parties réelle et imaginaire et les différences éventuelles de paramètres de ces densités étant implicite.

à la non-linéarité du modèle direct. Pour fixer les idées, considérons un modèle classique de Gauss-Markov généralisé [BOU 93] (de fonction potentiel $|\cdot|^p$, $1 < p \leq 2$).

13.4.1. Première formulation : estimation de \mathbf{x}

Les paramètres à estimer pour le problème d'imagerie sont les valeurs de la fonction de contraste sur les pixels de l'image, c'est-à-dire le vecteur \mathbf{x} .

La vraisemblance de l'objet, qui correspond à la distribution directe des données, s'écrit :

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = (\pi\sigma_M^2)^{-n_M/2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_M^2} \|\mathbf{y} - \mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 \right\}.$$

La règle de Bayes permet de fusionner l'information fournie par les mesures et l'information *a priori* dans la densité *a posteriori* des paramètres à estimer :

$$f(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = f(\mathbf{y} | \mathbf{x})f(\mathbf{x})/f(\mathbf{y}),$$

dans laquelle $f(\mathbf{y})$ est un coefficient de normalisation indépendant de \mathbf{x} .

Nous choisissons le MAP comme estimateur, c'est-à-dire la valeur de \mathbf{x} qui maximise la densité *a posteriori* :

$$\hat{\mathbf{x}}^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} | \mathbf{y}),$$

ou encore qui minimise le critère :

$$J^{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 + \lambda\Phi(\mathbf{x}),$$

$$\text{avec ici : } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_M \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X})^{-1} \phi_0,$$

$\lambda = \sigma_M^2/T$ jouant le rôle de paramètre de régularisation, réglant le compromis entre fidélité aux données et modèle *a priori*. Remarquons que le minimum s'entend au sens du minimum global du critère. Par abus de langage, le critère J^{MAP} sera souvent appelé par la suite critère du MAP.

13.4.2. Seconde formulation : estimation jointe de \mathbf{x} et ϕ

On peut également considérer le problème sous un autre angle en cherchant à estimer simultanément l'objet \mathbf{x} et le champ sur l'objet ϕ à partir des données. Partant des mêmes hypothèses que précédemment (bruit additif sur les mesures, blanc gaussien centré circulaire), nous exploiterons cette fois-ci la relation liant l'objet aux mesures à l'aide des équations couplées (13.5-13.6).

La règle de Bayes nous permet d'exprimer la loi *a posteriori* jointe en \mathbf{x} et ϕ sous la forme :

$$f(\mathbf{x}, \phi | \mathbf{y}) = f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \phi)f(\phi | \mathbf{x})f(\mathbf{x})/f(\mathbf{y}). \quad (13.8)$$

Dans cette relation, seuls les trois termes du numérateur nous intéressent. Le terme du dénominateur $f(\mathbf{y})$ étant indépendant de ϕ et \mathbf{x} , il n'intervient pas dans le calcul du MAP. Nous allons examiner ces trois termes un à un :

- d'après le modèle pris en compte pour les erreurs de mesures et d'après (13.6), le premier terme s'écrit :

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \phi) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_M^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_M \mathbf{X} \phi\|^2 \right\};$$

- le deuxième terme correspond à la densité de probabilité de ϕ pour \mathbf{x} connu ; ϕ étant le champ total sur l'objet, il est déterminé de façon unique par la deuxième des équations couplées (13.5), lorsque \mathbf{x} est connu. Cela amènerait donc à prendre en compte une mesure de probabilité (et non une densité de probabilité) du type :

$$\delta(\phi - \phi_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{X} \phi), \quad (13.9)$$

avec δ la distribution de Dirac ;

- le dernier terme correspond au modèle *a priori* pour l'objet.

Afin de pouvoir développer l'équation (13.8) à l'aide de densités de probabilité, nous allons recourir à un artifice de calcul. Considérons une erreur \mathbf{b}_0 venant perturber l'équation de couplage (13.5). Si l'on considère ces perturbations blanches gaussiennes circulaires centrées, de variance σ_O^2 et indépendantes de l'objet \mathbf{x} , on peut montrer que la densité de probabilité de ϕ , connaissant \mathbf{x} , s'écrit sous la forme :

$$f(\phi | \mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_O^2} \|\phi - \phi_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{X} \phi\|^2 \right\}.$$

La densité *a posteriori* jointe en \mathbf{x} et ϕ s'exprime alors sous la forme :

$$f(\mathbf{x}, \phi | \mathbf{y}) \propto \exp \{ -J^{\text{MAPJ}}(\mathbf{x}, \phi) \}, \quad \text{avec :} \\ J^{\text{MAPJ}}(\mathbf{x}, \phi) = \frac{1}{\sigma_M^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_M \mathbf{X} \phi\|^2 + \frac{1}{\sigma_O^2} \|\phi - \phi_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{X} \phi\|^2 + \frac{\Phi(\mathbf{x})}{T}. \quad (13.10)$$

L'estimé au sens du MAP du couple (\mathbf{x}, ϕ) maximise $f(\mathbf{x}, \phi | \mathbf{y})$, donc minimise le critère J^{MAPJ} . Rappelons que l'obtention de ce critère repose sur des hypothèses – perturbations sur l'équation de couplage (13.5) – qui n'ont pas de justification physique ou statistique. Il s'agit donc uniquement d'hypothèses *ad hoc* permettant d'établir le critère J^{MAPJ} . Remarquons que si l'on répercute ces perturbations au niveau des données \mathbf{y} , ces hypothèses sont équivalentes à considérer des erreurs de la forme $\mathbf{b}_M + \mathbf{G}_M \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X})^{-1} \mathbf{b}_O$ dans lesquelles \mathbf{b}_M et \mathbf{b}_O sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, les erreurs considérées sur les données dépendant alors de l'objet \mathbf{x} . Afin de s'affranchir de ces hypothèses, il faut faire tendre la variance σ_O^2 des perturbations

\mathbf{b}_O vers zéro. La distribution gaussienne $f(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{x})$ tend alors vers le Dirac (13.9) au sens des fonctions généralisées. Dans ce cas, le coefficient de pondération $1/\sigma_O^2$ du second terme du critère J^{MAPJ} tend vers l'infini, ce qui revient à dire que l'estimé au sens du MAP du couple $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi})$ minimise le critère :

$$J^{\text{MAPC}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_M \mathbf{X} \boldsymbol{\phi}\|^2 + \lambda \Phi(\mathbf{x}), \quad (13.11)$$

(avec $\lambda = \sigma_M^2/T$) sous les contraintes bilinéaires :

$$\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{X} \boldsymbol{\phi} = 0. \quad (13.12)$$

En général, d'un point de vue probabiliste, la solution en \mathbf{x} de l'estimé en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi})$ au sens du MAP joint n'a aucune raison de correspondre à l'estimé au sens du MAP de \mathbf{x} . Il est évident que l'on aboutit ici à la même solution du fait de la relation déterministe liant $\boldsymbol{\phi}$ et \mathbf{x} , et le critère J^{MAPC} n'est rien d'autre que le critère J^{MAP} dans lequel on a posé $\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X})^{-1} \boldsymbol{\phi}_0$, relation que l'on a pris en compte en tant que contrainte liant \mathbf{x} et $\boldsymbol{\phi}$.

13.4.3. Propriétés des critères

Nous avons défini une solution régularisée au problème de tomographie de diffraction, amenant à la minimisation d'un critère avec ou sans contrainte. Bien évidemment, avant d'essayer de mettre en œuvre des techniques d'optimisation, il est important d'étudier les propriétés de ces critères.

Comme il a été vu au chapitre 3, dans le cas d'un problème linéaire en \mathbf{x} avec un modèle de bruit additif gaussien, le terme de fidélité aux données est quadratique en \mathbf{x} , donc convexe et la non-convexité éventuelle provient du modèle *a priori* sur les inconnues. Dans notre cas, la non-linéarité du modèle du problème direct se traduit par la non-convexité des critères présentés et de la contrainte (rappelons que nous avons choisi un modèle *a priori* donnant une fonction Φ convexe). Ainsi, on n'est pas assuré de l'unimodalité de ces critères, ce qui ne signifie pas forcément qu'ils possèdent des minima locaux³. Hormis les situations pour lesquelles on peut exploiter une approximation linéaire du problème direct, on peut envisager deux types de situations : les premières, « favorables », pour lesquelles, bien que non convexes, les critères ne possèdent pas de minima locaux ; les secondes, plus difficiles, pour lesquelles des minima locaux sont présents. Ces dernières apparaissent notamment lorsque la fonction de contraste prend des valeurs élevées et que le nombre de données est faible (voire inférieur au nombre d'inconnues). Suivant le type de situation, on se rend compte dès à présent que l'on ne peut envisager de mettre en œuvre les mêmes techniques d'optimisation.

³ Rappelons que la convexité n'est qu'une condition suffisante de l'unimodalité.

13.5. Résolution du problème inverse

Depuis la fin des années 1980, de nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème inverse non linéaire. Généralement présentées dans un cadre fonctionnel, il n'est pas toujours très aisé de comparer ces méthodes d'un point de vue théorique. Le cadre algébrique bayésien adopté dans ce chapitre, c'est-à-dire la minimisation des critères définis section 13.4, nous permet de jeter un regard unifié sur la plupart des approches adoptées. L'objectif n'est pas ici de détailler les différentes méthodes d'inversion utilisées, mais surtout de présenter leurs points forts, leurs faiblesses et des points de comparaison en termes d'optimisation et de régularisation. On peut distinguer trois classes de méthodes qui vont maintenant être étudiées.

13.5.1. *Linéarisations successives*

Les premières méthodes proposées s'appuient sur des approximations affines successives du modèle du problème direct, donc sur la résolution successive de problèmes inverses *linéaires*, selon un schéma itératif en deux étapes :

- 1) approximation affine du modèle du problème direct autour d'une valeur courante pour l'objet \mathbf{x}_n : $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_n \mathbf{x} + \mathbf{b}_n$;
- 2) calcul de \mathbf{x}_{n+1} solution du problème inverse linéaire correspondant.

Remarquons qu'une telle approche est envisageable pour la résolution de tout problème inverse non linéaire, même si aucune propriété de convergence ne peut être établie en général.

Ces méthodes ont généralement été proposées en s'appuyant sur des approximations des équations de propagation des ondes, et donc du modèle direct sous forme intégrale. Pour les comparer, il faut étudier l'approximation affine et la régularisation effectuées.

Approximations

D'un point de vue théorique, la plus cohérente des approximations affines d'une fonction \mathcal{A} au voisinage d'un point \mathbf{x}_n est donnée par son développement de Taylor⁴ d'ordre 1 autour de \mathbf{x}_n :

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_n) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{A}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \mathcal{O}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)^2).$$

Dans le cadre algébrique, le calcul de $\mathbf{A}_n \triangleq \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{A}(\mathbf{x}_n)$ peut être effectué de façon simple. En effet, si $\phi_n = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O X_n)^{-1} \phi_0$ représente le champ sur l'objet

⁴ Notons cependant qu'un tel développement ne peut être défini de façon si simple pour des fonctions de variables complexes, à valeurs complexes. En effet, l'opérateur gradient n'est pas défini pour de telles fonctions. Néanmoins, cette relation peut être appliquée et calculée à partir d'une notation réelle équivalente (séparant parties réelle et imaginaire) des équations du modèle direct.

correspondant au contraste \mathbf{x}_n et Ψ_n est la matrice diagonale correspondante, \mathbf{A}_n peut s'écrire : $\mathbf{A}_n = \mathbf{G}_M (\mathbf{I} + \mathbf{X}_n (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{G}_O) \Psi_n$.

Néanmoins, une telle approximation n'a pas toujours été utilisée. Ainsi, la méthode de *Born iterative* [WAN 89] (BIM), qui vise à résoudre successivement vis-à-vis de l'une des variables (contraste ou champ sur l'objet) chacune des équations couplées (13.3-13.4), considère une approximation *via* une matrice de la forme $\mathbf{A}_n = \mathbf{G}_M \Psi_n$ correspondant à une linéarisation plus grossière du modèle (remarquons que dans ce cas, $\mathbf{b}_n = 0$ car $\mathcal{A}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n$).

En revanche, une telle approximation est prise en compte dans les méthodes de *Distorted Born iterative* (DBIM) [CHE 90] et de Newton-Kantorovitch (NKM) [JOA 91], qui se sont révélées être identiques bien que proposées à partir d'approches distinctes.

Notons que le coût de calcul des matrices d'approximation est plus ou moins équivalent à celui de la résolution du problème direct.

Régularisation

La régularisation effectuée par la méthode de BIM est de type Tikhonov, c'est-à-dire *via* une pénalisation quadratique sur \mathbf{x} . Cette méthode s'interprète donc directement en termes de minimisation de J^{MAP} .

Les méthodes de NKM et de DBIM, quant à elles, introduisent une pénalisation, toujours quadratique, mais sur $\mathbf{x} - \mathbf{x}_n$ et non directement sur \mathbf{x} .

Interprétation

Dans le cadre proposé section 13.4, un schéma de linéarisations successives peut être envisagé pour la minimisation du critère J^{MAP} [CAR 97a] :

- 1) calcul de la matrice \mathbf{A}_n et du vecteur \mathbf{b}_n correspondant à l'approximation affine du problème direct autour d'une valeur courante pour l'objet \mathbf{x}_n ;
- 2) minimisation du critère $J_n = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}_n \mathbf{x} + \mathbf{b}_n\|^2 + \lambda \Phi(\mathbf{x})$.

A chaque itération de cet algorithme, le critère J^{MAP} est approché par un critère convexe J_n ayant la même valeur en \mathbf{x}_n et la même pente en ce point. Bien sûr, cet algorithme ne possède aucune garantie théorique de convergence et peut donc diverger ; de même, la convergence éventuelle et le point stationnaire atteint dépendent de l'initialisation de l'algorithme. Néanmoins, lorsque cet algorithme converge vers un point stationnaire \mathbf{x}_∞ , alors ce point est un point stationnaire du critère J^{MAP} (c'est-à-dire annulant son gradient).

Notons que l'algorithme correspondant à BIM consiste lui aussi à approcher le critère J^{MAP} (pour $\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$) par une suite de critères convexes ayant la même valeur en \mathbf{x}_n mais n'ayant pas la même pente en \mathbf{x}_n . Aussi, même quand cet algorithme converge, la solution ne correspond pas obligatoirement à un point stationnaire de J^{MAP} . La régularisation effectuée sur $\mathbf{x} - \mathbf{x}_n$ pour DBIM

et NKM ne permet pas de les interpréter dans ce cadre, mais il a été remarqué [CHE 90] que DBIM diverge plus facilement que BIM, de toute évidence à cause de cette régularisation, et que pour NKM, un schéma d'adaptation des paramètres de régularisation a dû être introduit dans [JOA 91] pour éviter ce désagrément.

Remarquons finalement que toutes les méthodes de régularisation de problèmes inverses linéaires peuvent être exploitées pour résoudre les problèmes non linéaires par linéarisations successives (en particulier la décomposition en valeurs singulières tronquées, comme cela a été proposé dans [ERI 96]), mais que de telles méthodes se contentent d'essayer de stabiliser chaque problème linéaire. A l'opposé, un schéma de linéarisations successives pour la minimisation du critère défini section 13.4 permet de régulariser le problème non linéaire en introduisant de l'information *a priori* sur l'objet étudié.

13.5.2. Minimisation jointe

Une deuxième approche utilisée pour résoudre ce problème non linéaire vise à calculer conjointement \mathbf{x} et ϕ satisfaisant les équations couplées (13.3-13.4). Pour cela, un critère joint sur \mathbf{x} et ϕ est défini, de la forme :

$$K(\mathbf{x}, \phi) = \alpha_M \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_M \mathbf{X} \phi\|^2 + \alpha_O \|\phi - \phi_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{X} \phi\|^2 + \lambda \Phi(\mathbf{x}, \phi). \quad (13.13)$$

Remarquons que nous nous sommes ici placés dans un cadre algébrique, alors que les méthodes s'appuyant sur un tel critère ont, pour la plupart, été introduites dans un cadre fonctionnel. De tels critères sont apparus pour le problème de tomographie de diffraction dans [KLE 92], en parallèle de [SAB 93] et ont largement été exploités par la suite.

Certaines différences apparaissent entre les méthodes proposées sur lesquelles nous allons maintenant insister :

- différentes valeurs ont été proposées pour les paramètres α_M et α_O présents dans le critère (par exemple dans [KLE 92, SAB 93]), sans que ces valeurs n'aient été théoriquement justifiées ;
- des différences apparaissent également sur le terme de régularisation parfois introduit dans le critère. Dans un premier temps, aucune régularisation n'était prise en compte [KLE 92, SAB 93]. Puis une pénalisation jointe sur \mathbf{x} et ϕ a été proposée (par exemple dans [BAR 94]). Enfin, une régularisation sur \mathbf{x} uniquement a été considérée avec une énergie Φ correspondant à des modèles de Gibbs-Markov (par exemple dans [BER 95, CAO 95]) ;
- enfin, diverses techniques d'optimisation ont été employées afin de calculer cette solution : optimisation locale de type gradient (par exemple dans [BAR 94, KLE 92, SAB 93]) ; ou optimisation globale stochastique de type recuit simulé dans [CAO 95] (pour une fonction Φ non convexe).

Le lien entre les critères K (13.13) et J^{MAPJ} (13.10) présenté au paragraphe 13.4.2 comme un artifice de calcul est évident (la seule différence provenant

de la présence de ϕ dans la fonction Φ). C'est d'ailleurs par une telle approche, en considérant des erreurs sur chacune des équations couplées, qu'un tel critère est proposé dans [CAO 95], sans aucune justification sur ces hypothèses. Si la régularisation n'intervient que sur \mathbf{x} , le critère (13.13) correspond au critère J^{MAPC} pénalisé par l'erreur de la norme sur la contrainte (13.12). Le résultat d'une telle minimisation n'est pas assuré de vérifier la contrainte (13.11) et la solution ne correspond donc pas à celle définie par l'approche jointe au paragraphe 13.4.2. Dans ce but, un algorithme d'optimisation sous contraintes s'appuyant sur le lagrangien augmenté a été proposé [CAR 96]. Notons que les conditions de convexité du critère et de la contrainte n'étant pas remplies, un tel algorithme ne possède pas de garantie de convergence.

Enfin, remarquons que le calcul du critère, donc sa minimisation, ne nécessitent pas la résolution du problème direct. Ainsi, le coût de calcul reste très raisonnable, comparé au coût de résolution du problème direct. Le prix à payer pour bénéficier de ce coût de calcul réduit est l'augmentation du nombre d'inconnues puisque l'on recherche simultanément \mathbf{x} et ϕ (rappelons que dans un cas multisource, ϕ est le champ dans le domaine de l'objet pour chaque source, le nombre d'inconnues est donc multiplié par le nombre de sources plus un).

13.5.3. Minimisation du critère du MAP

Une troisième approche pour aborder le problème consiste à minimiser directement le critère des moindres carrés $\|\mathbf{y} - \mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2$, régularisé (c'est-à-dire le critère J^{MAP} défini au paragraphe 13.4.1) ou non. Notons que pour une telle approche, il n'est pas nécessaire de définir l'opérateur \mathcal{A} de façon explicite ; il suffit de disposer d'un algorithme permettant de résoudre le problème direct. Cependant, la connaissance du modèle du problème direct et la mise en évidence de structures particulières de ce modèle peuvent permettre de mettre en œuvre des algorithmes d'optimisation spécifiques.

L'importance de la régularisation n'est plus à souligner dans le cadre de cet ouvrage. Néanmoins, il faut préciser que de nombreux travaux ont défini la solution comme minimisant ce critère non régularisé. Par exemple, dans [GAR 91], un algorithme d'optimisation globale de type recuit simulé est utilisé. Les simulations ayant été effectuées sans bruit sur les mesures, cet algorithme a donné de bons résultats, même sans régularisation. Cependant, on peut reprocher à cet exemple de commettre le « crime inverse », c'est-à-dire d'inverser un modèle direct connu sans erreur ni incertitude, ce qui n'est pas réaliste.

Dans [HAR 95], un algorithme du type gradient conjugué a été proposé dans un cadre fonctionnel et des reconstructions à partir de données bruitées sont présentées ; la régularisation n'est pas introduite de façon explicite dans le critère, mais l'algorithme est arrêté avant que la solution ne soit plus satisfaisante.

Comme on l'a vu au paragraphe 13.4.3, la non-linéarité du modèle direct

entraîne la non-convexité du critère J^{MAP} et la présence éventuelle de minima locaux, aussi faut-il être prudent avant de mettre en œuvre un algorithme pour minimiser ce critère.

Dans les situations les plus *favorables*, pour lesquelles le critère des moindres carrés est unimodal – il en est donc de même pour le critère J^{MAP} lorsque la fonction Φ considérée est elle-même convexe – les méthodes de minimisation par linéarisations successives du paragraphe 13.5.1 et par optimisation sous contraintes du paragraphe 13.5.2 permettent généralement de calculer la solution. De plus, de telles méthodes sont largement moins coûteuses en calcul que des techniques d’optimisation classiques de type gradient, qui nécessitent la résolution du problème direct pour chaque évaluation du critère J^{MAP} . Aussi, il semble inutile, dans ces situations, de chercher à minimiser directement le critère J^{MAP} , hormis éventuellement dans les cas où l’on souhaite prendre en compte un modèle *a priori* de fonction Φ non convexe [LOB 97].

Dans les situations plus *difficiles*, pour lesquelles le critère possède des minima locaux, on peut envisager d’utiliser des techniques d’optimisation globale pour minimiser le critère J^{MAP} , car des techniques d’optimisation locale – en particulier celles présentées aux paragraphes 13.5.1 et 13.5.2 lorsqu’elles convergent – peuvent rester bloquées dans des minima locaux. Ce problème des minima locaux est soulevé dans [GAR 91], dans lequel le nombre de données disponibles est faible et l’intérêt d’une technique d’optimisation globale, le recuit simulé, est mis en avant. Dans [CAR 95] un algorithme d’optimisation globale déterministe, de type non-convexité graduelle (GNC), a été proposé et dans [CAR 97b], un algorithme d’optimisation globale, variable par variable (*Iterative Coordinate Descent* ICD), a été présenté. Ces deux algorithmes tirent profit de structures particulières du modèle direct $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ pour tenter d’effectuer l’optimisation de façon globale. Néanmoins, la convergence théorique vers le minimum global n’est pas garantie.

A titre d’illustration, on peut montrer des résultats de simulations dans une configuration difficile (pour plus de détails sur ces simulations, cf. [CAR 96]). On dispose de mesures effectuées sur huit capteurs, pour des ondes émises de huit positions distinctes. Les mesures sont bruitées (RSB de 20 dB) et l’on a discrétisé l’objet en une grille de 11×11 pixels (121 inconnues pour 64 données). Le contraste maximum est de 5,5. On a représenté figure 13.3 la permittivité de l’objet original, sa reconstruction par minimisation du critère J^{MAP} par gradient conjugué et par GNC pour une fonction potentiel $|\cdot|^{1,1}$, puis par ICD pour une fonction potentiel $|\cdot|$. On voit clairement sur cet exemple la présence d’un minimum local dans lequel l’algorithme du gradient conjugué est resté bloqué. Notons qu’une régularisation de Tikhonov (modèle gaussien : $\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$) donnerait une solution bien moins satisfaisante qu’avec les modèles markoviens considérés.

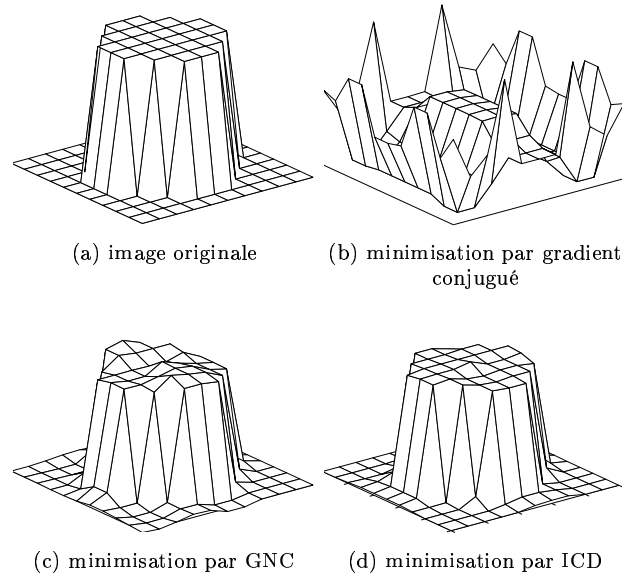


Figure 13.3. Exemple de reconstruction par minimisation de J^{MAP} dans une configuration difficile

13.6. Conclusion

La tomographie de diffraction, abordée comme un problème inverse non linéaire particulier, permet de relever certains points importants pour la résolution d'autres problèmes non linéaires. Une solution régularisée au problème peut être définie en tant qu'estimé au sens du maximum *a posteriori*, en introduisant de façon explicite de l'information *a priori* sur l'objet à reconstruire. Une telle solution peut être définie dès que le modèle direct présente une relation explicite entre les inconnues et les données. En considérant des perturbations gaussiennes sur ces données, cette solution est une version régularisée de la solution des moindres carrés. Néanmoins, il peut être intéressant de tirer parti d'autres formulations du modèle direct que cette relation explicite pour définir la solution. Ces différentes formulations amènent à résoudre un problème d'optimisation non convexe, avec ou sans contrainte.

Comme pour les problèmes inverses linéaires, l'information *a priori* est introduite sous forme de modèles probabilistes ou de façon équivalente comme un terme de pénalisation du critère des moindres carrés. Un grand nombre de modèles d'images a été exploité pour des problèmes inverses linéaires depuis une quinzaine d'années et ils se sont révélés bien plus efficaces qu'une pénalisation énergétique de type Tikhonov.

Le calcul de la solution nécessite la mise en œuvre d'algorithmes d'optimisation qui requièrent eux-même la résolution du problème direct, sous sa forme explicite ou sous une autre forme. La discrétisation de ce modèle sous une forme simple et peu coûteuse en calcul est alors une étape importante de la résolution du problème.

La plupart des méthodes de résolution existantes ont pu être étudiées dans ce cadre, en termes de techniques d'optimisation. Différentes techniques doivent en effet être utilisées suivant la difficulté du problème. Pour ce problème, de forts contrastes dans l'objet et un nombre faible de données entraînent la présence de minima locaux dans le critère. Dans les situations favorables, des techniques de linéarisations successives du modèle direct peuvent être utilisées pour effectuer une optimisation locale du critère. De même, la forme particulière du modèle, dans notre cas des équations couplées, peut être exploitée pour calculer la solution en effectuant une optimisation locale sous contraintes. Néanmoins, dans les situations où des minima locaux sont présents, des techniques d'optimisation globale, beaucoup plus gourmandes en calculs, doivent être utilisées, ces dernières pouvant bien évidemment tirer profit de la forme du modèle direct discrétisé.

13.7. Bibliographie

- [BAR 94] S. BARKESHLI et R. G. LAUTZENHEISER, « An iterative method for inverse scattering problems based on an exact gradient search », *Radio Science*, 29(4), p. 1119-1130, 1994.
- [BER 95] P. M. VAN DEN BERG et R. E. KLEINMAN, « A total variation enhanced modified gradient algorithm for profile reconstruction », *Inverse Problems*, 11, p. L5-L10, 1995.
- [BOL 83] J. C. BOLOMEY, G. PERONNET, C. PICHOT, L. JOFRE, M. GAUTHERIE et J. L. GUERQUIN KERN, « L'imagerie micro-onde active en génie biomédical », in *L'imagerie du corps humain*, p. 53-76, Les Éditions de physique, Paris, 1983.
- [BOU 93] C. A. BOUMAN et K. D. SAUER, « A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation », *IEEE Trans. Image Processing*, 2(3), p. 296-310, 1993.
- [CAO 95] S. CAORSI, G. L. GRAGNANI, S. MEDICINA, M. PASTORINO et A. PINTO, « A Gibbs random fields-based active electromagnetic method for noninvasive diagnostics in biomedical applications », *Radio Science*, 30(1), p. 291-301, 1995.
- [CAR 95] H. CARFANTAN et A. MOHAMMAD-DJAFARI, « A Bayesian approach for nonlinear inverse scattering tomographic imaging », in *Proc. IEEE ICASSP*, p. 2311-2314, Detroit, MI, USA, mai 1995.
- [CAR 96] H. CARFANTAN, Approche bayésienne pour un problème inverse non linéaire en imagerie à ondes diffractées, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, 1996.
- [CAR 97a] H. CARFANTAN et A. MOHAMMAD-DJAFARI, « An overview of nonlinear diffraction tomography within the Bayesian estimation framework », in *Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction*, p. 107-124, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, New York, 1997.

- [CAR97b] H. CARFANTAN, A. MOHAMMAD-DJAFARI et J. IDIER, « A single site update algorithm for nonlinear diffraction tomography », in *Proc. IEEE ICASSP*, p. 2837-2840, Munich, Allemagne, avril 1997.
- [CHE90] W. C. CHEW et Y. M. WANG, « Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method », *IEEE Trans. Med. Imag.*, 9, p. 218-225, 1990.
- [COL92] D. COLTON et R. KRESS, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer Verlag, New York, 1992.
- [ERI96] J. ERIKSSON, Optimization and regularization of nonlinear least squares problems, PhD thesis, Umeå University, Suède, 1996.
- [GAR91] L. GARNERO, A. FRANCHOIS, J.-P. HUGONIN, C. PICHOT et N. JOACHIMOWICZ, « Microwave imaging – complex permittivity reconstruction by simulated annealing », *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 39(11), p. 1801-1807, 1991.
- [HAR87] R. F. HARRINGTON, « The method of moments in electromagnetics », *J. Electromagnetic Waves Appl.*, 1(3), p. 181-200, 1987.
- [HAR95] H. HARRADA, D. N. WALL, T. TAKENAKA et M. TAKANA, « Conjugate gradient methode applied to inverse scattering problem », *The Annals of Probability*, 43(8), p. 784-791, 1995.
- [HOW86] A. Q. J. HOWARD et J. L. KRETZSCHMAR, « Synthesis of EM geophysical tomographic data », *Proc. IEEE*, 74(2), p. 353-360, 1986.
- [JOA91] N. JOACHIMOWICZ, C. PICHOT et J.-P. HUGONIN, « Inverse scattering : An iterative numerical method for electromagnetic imaging », *IEEE Trans. Ant. Propag.*, AP-39(12), p. 1742-1752, 1991.
- [KAK87] A. C. KAK et M. SLANEY, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York, 1987.
- [KLE92] R. E. KLEINMAN et P. M. VANDEN BERG, « A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography », *J. Comput. Appl. Math.*, 42, p. 17-35, 1992.
- [LOB97] P. LOBEL, L. BLANC-FERAUD, C. PICHOT et M. BARLAUD, « A new regularization scheme for inverse scattering », *Inverse Problems*, 13(2), p. 403-410, 1997.
- [SAB93] H. A. SABBAGH et R. G. LAUTZENHEISER, « Inverse problems in electromagnetic nondestructive evaluation », *Int. J. Appl. Electromag. Mat.*, 3, p. 235-261, 1993.
- [TAR82] A. TARANTOLA et B. VALETTE, « Inverse problems = quest for information », *J. Geophys.*, 50, p. 159-170, 1982.
- [TAR87] A. TARANTOLA, *Inverse problem theory: Methods for data fitting and model parameter estimation*, Elsevier Science Publ., Amsterdam, 1987.
- [WAN89] Y. M. WANG et W. C. CHEW, « An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem », *Int. J. Imag. Syst. Tech.*, 1, p. 100-108, 1989.
- [ZOR91] R. ZORGATI, B. DUCHENE, D. LESSELIER et F. PONS, « Eddy current testing of anomalies in conductive materials, part I : Qualitative imaging via diffraction tomography techniques », *IEEE Trans. Magnet.*, 27(6), p. 4416-4437, 1991.

