Chapitre 1

Introduction

En sciences expérimentales, rares sont les situations où l'on peut mesurer directement une quantité f à laquelle on s'intéresse, pour étudier sa distribution spatiale $f(\boldsymbol{r})$ à un instant donné ou sa variation temporelle $f(t)$ à une position donnée ou encore sa variation spatio-temporelle $f(\boldsymbol{r}, t)$.

Souvent, cette quantité est mesurée par l'intermédiaire d'un simple capteur (ou d'un système de mesure plus complexe et rarement idéal) qui a pour rôle de fournir une grandeur mesurable g liée à f par une relation simple. Prenons comme exemple la mesure d'une température par un thermomètre classique. La grandeur réellement mesurée est une longueur qui, idéalement, est proportionnelle à la température. Mais, lorsque l'on souhaite étudier la variation temporelle de cette température les difficultés apparaissent : le capteur ne reproduit pas fidèlement la variation de la température lorsque celle-ci est un peu trop rapide (limitation de la bande passante du capteur). On essaie ensuite d'étudier le lien entre la sortie du capteur $g(t)$ et son entrée $f(t)$ en fournissant un *modèle*, souvent linéaire et invariant par translation–*modèle de convolution* –et donc caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* $h(t)$ ou sa *réponse fréquentielle* $H(\omega)$. Ensuite on *analyse* ce modèle pour prescrire la plage de son utilisation.

L'établissement d'un lien entre la sortie $g(t)$ et l'entrée $f(t)$ est ce qu'on appelle *modélisation directe*. t La détermination de la réponse impulsionnelle ou de la réponse fréquentielle est le problème de l'*identification*. Étant donné le modèle, l'étude de la sortie pour différentes formes de l'entrée est l'*analyse du problème directe*. Et finalement, étant donné le modèle et la sortie, la détermination de l'entrée est ce qu'on appelle l'*inversion* ou encore la *résolution du problème inverse*.

Lorsque le modèle liant la sortie $g(t)$ et l'entrée $f(t)$ est linéaire et invariant par translation on a un modèle de *convolution* :

$$g(t) = \int f(t')h(t-t')\,\mathrm{d}t'.$$

Étant données l'entrée $f(t)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$, en général, on ne rencontre pas de problème particulier pour déterminer la sortie $g(t)$. Mais, malheureusement, les problèmes réels se formulent ainsi :

1. Ayant mesuré $f(t)$ et $g(t)$, déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$. C'est le problème de *l'identification de la réponse impulsionnelle.*

2. Connaissant $h(t)$ et ayant mesuré $g(t)$, déterminer l'entrée $f(t)$. C'est le problème inverse de la *déconvolution simple.*

3. Ayant seulement mesuré $g(t)$, déterminer à la fois la réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'entrée $f(t)$. C'est le problème inverse de la *déconvolution aveugle*.

Prenons un deuxième exemple: l'imagerie tomographique, où on souhaite étudier la distribution spatiale de la densité de matière $f(x, y, z)$ à l'intérieur d'un corps. Pour la mesurer, nous avons besoin d'un intermédiaire : des rayons X par exemple. On illumine ce corps par ces rayons et on mesure les résultats de son interaction avec ces ondes : la perte d'énergie des rayons lors de la traversé du corps, c'est-à-dire les radiographies suivant plusieurs directions $p(r, s, \phi)$. On essaie ensuite d'étudier le lien entre ces mesures $p(r, s, \phi)$ et l'inconnue $f(x, y, z)$ en fournissant un *modèle* liant ces quantités. Le problème inverse consiste alors à déterminer la fonction $f(x, y, z)$ à partir de ces *projections* $p(r, s, \phi)$. Lorsqu'on s'intéresse à une section du corps étudié $f(x, y, z_0)$ on parle de la *reconstruction tomographique* ou de la *reconstruction d'image 2D* et dans le cas général on parle de la *reconstruction 3D*. Dans le cas 2D, une modélisation simple entre $f(x, y)$ et $p(r, \phi)$ est la transformée de Radon (TR) :

$$p(r, \phi) = \int_L f(x, y) \, \mathrm{d}l = \iint f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

L'objet de ce texte est de fournir un cadre général et compréhensible pour la description et la résolution de ces problèmes.

- Dans le chapitre 2, nous montrons à travers des exemples que les problèmes inverses se trouvent au cœur d'un très grand nombre de domaines des sciences expérimentales et plus particulièrement des sciences pour l'ingénieur.

- Dans le chapitre 3, nous essayons de fournir un cadre général pour les problèmes inverses et de montrer que les différents exemples d'applications que nous avons présentés au chapitre précédent sont des cas particulier de ce cadre général.

- Dans le chapitre 4 [1] , nous essayons de définir les notions des problèmes bien-posés et mal-posés et de montrer pourquoi la résolution des problèmes inverses est une tâche difficile.

- Dans le chapitre 5, nous introduisons les notions de pseudo-solutions, solutions au sens des moindres carrés (MC) et solution inverse généralisée (IG). Nous verrons ensuite que, malheureusement, bien que ces notions permettent, sous certaines conditions, de définir une solution unique pour un problème inverse mal-posé, elles ne permettent pas de fournir une solution satisfaisante à ces problèmes.

- Le chapitre 6 est consacré à la notion de régularisation et à l'étude des différentes techniques de régularisation pour la résolution des problèmes inverses linéaires.

- Dans le chapitre 7, nous essaierons de classifier les différentes méthodes d'inversion. Ceci nous permettra d'avoir une vue plus synthétique de ces différentes méthodes et des liens qui existent entre elles.

1. Les contenus des chapitres 4, 5 et 6, restent pour l'instant très sommaires et sont inspirés du polycopié du Guy Demoment intitulé "Déconvolution des signaux". Ce polycopié est disponible à la bibliothèque de Supélec.

- Dans le chapitre 8, nous présentons la résolution des problèmes inverses comme un problème d'estimation dans un cadre probabiliste. Nous distinguerons ensuite quatre approches :

  1. Approche estimation au sens des moindres carrés où estimation linéaire en moyenne quadratique où seuls les moments d'ordre un et deux sont utilisés, ce qui revient implicitement à faire l'hypothèse que toutes les variables sont gaussiennes. Pour illustrer cette approche nous prendrons comme exemple le filtrage optimal ;

  2. Approche estimation au sens du maximum de vraisemblance où nous verrons rapidement que cette approche, bien que plus générale, dans le sens où l'on peut prendre en compte explicitement la loi des mesures, est peu satisfaisante pour la résolution des problèmes inverses ;

  3. Approche maximum d'entropie où, après un rappel sur le principe du maximum d'entropie et son utilité pour l'attribution d'une loi de probabilité, nous verrons que cette approche permet de fournir une nouvelle interprétation de la notion de régularisation et permet de répondre à un certain nombre de questions concernant le choix des fonctionnelles de régularisation ;

  4. Approche estimation bayésienne où nous verrons comment elle peut fournir un cadre fédérateur pour la définition d'une solution régularisée englobant tous les critères précédents. Nous verrons ensuite que cette approche est plus cohérente, plus générale, plus simple et plus efficace pour aborder les problèmes inverses.

- Le chapitre 9 est entièrement réservé à l'approche bayésienne. Dans ce chapitre, nous détaillerons cette approche et présenterons un certain nombre de cas particuliers qui illustreront la généralité et l'universalité de cette approche.

- Dans le chapitre 11, nous donnons un aperçu général de la modélisation markovienne des signaux et des images. Les modèles markoviens et particulièrement les champs de Gibbs sont devenus les outils indispensables pour la traduction d'une information *a priori* plus élaborée que la douceur ou la positivité en une loi de probabilité. En effet, la modélisation markovienne permet de construire des modèles qui peuvent prendre en compte des discontinuités dans un signal ou une image. Cette outil prend particulièrement son importance en traitement d'image où l'on peut construire les modèles composites (bords, contours, intensité) pour les images et les utiliser lors de la segmentation, restauration ou reconstruction d'image.

- Dans le chapitre 12, nous aborderons le problème de l'estimation des hyperparamètres, et en particulier, la détermination du paramètre de régularisation. Dans un premier temps, nous décrirons brièvement les méthodes classiques du type : adéquation aux données, la courbe en L, la validation croisée, et la validation croisée généralisée. Ensuite, nous présenterons le problème général de l'estimation des hyperparamètres dans le cadre bayésien.

- Dans les chapitres 13, 14 et 15 nous présenterons un certain nombre d'*études de cas* comme la déconvolution des signaux, la restauration d'image, la reconstruction d'images, ...

Un certain nombre d'annexes sont présentées à la fin du document qui ont pour but soit de compléter certains détails ou d'apporter des éléments et des outils qui sont nécessaires lorsqu'un ingénieur veut aborder la résolution de problèmes inverses.

Et, finalement, une bibliographie classifiée concluera ce document.