

Chapitre 2

Exemples de problèmes inverses

L'objet de ce chapitre est de montrer que les problèmes inverses se trouvent au cœur d'un très grand nombre de domaines de la science expérimentale et plus particulièrement de la science pour l'ingénieur. Bien entendu, la description de chaque application ne peut qu'être très brève.

2.1 Instrumentation

Un capteur ou un appareil de mesure serait idéal si sa sortie $g(t)$ était proportionnelle à son entrée $f(t)$ pour tout t , c'est-à-dire lorsque

$$\forall t \quad g(t) = af(t) + b,$$

a et b étant deux constantes fixées.

Ceci est rare. Le mieux que l'on puisse demander est que sa sortie soit une fonction linéaire de son entrée :

$$g(t) = \int f(\tau)h(t, \tau) d\tau.$$

Mieux encore, c'est le cas où sa réponse $h(t, \tau)$ ne varie pas en cours du temps, ce qui veut dire $h(t, \tau) = h(t - \tau)$. On a ainsi

$$g(t) = \int f(\tau)h(t - \tau) d\tau.$$

Il s'agit d'une équation de convolution. La fonction $h(t)$ est appelée la réponse impulsionnelle. Lorsque le système est causal, i.e; $h(t) = 0, \forall t < 0$, on a

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau) d\tau.$$

Un capteur serait parfait si

$$h(t) \simeq a\delta(t) \quad \longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{a}g(t)$$

Lorsque ceci n'est pas le cas, les ingénieurs ont l'habitude de travailler avec la réponse indicielle du capteur :

$$s(t) = \int_0^t h(t - \tau) d\tau$$

sur laquelle ils mesurent, le *temps de montée*, le *dépassement*, le *déphasage*, la *résolution maximale*, le critère de Raleigh, etc. Et lorsque ces grandeurs ne sont pas satisfaisantes ils changent le capteur. Mais cela peut être coûteux et même parfois techniquement impossible.

Que peut-on faire alors? Il y a vingt ans, cette question n'avait pas de réponse pratique. Aujourd'hui, avec les techniques numériques de l'inversion, on peut proposer la *déconvolution*. L'idée de base est de placer derrière le capteur un microprocesseur qui, partant des échantillons de la réponse impulsionnelle $h(t)$ et ceux de la sortie du capteur $g(t)$ fournira $\hat{f}(t)$ qui est beaucoup plus proche de $f(t)$ que $g(t)$, dépassant ainsi le critère de Raleigh. En effet, $\hat{f}(t)$ aura une meilleure résolution que $g(t)$. On peut même par des techniques adaptatives compenser les effets d'une dégradation des caractéristiques du capteur en réestimant un certain nombre de paramètres de sa réponse impulsionnelle au cours du temps.

Ainsi, au lieu d'exiger du capteur d'avoir un temps de montée de telle valeur, un dépassement de telle autre valeur, etc., on lui imposerait d'être *linéaire*, *fidèle*, et *précis*. Le traitement numérique permettra alors de compenser le manque de résolution ou la limitation de la bande passante, etc.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{linéarité} \\ \text{fidélité} \\ \text{précision} \end{array} \right. + \text{Déconvolution} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Amélioration de la résolution} \\ \text{Dépassement du critère de Raleigh} \end{array} \right.$$

2.2 Tomographie à rayons X

Si un objet de matière homogène est illuminé par des rayons X et qu'un rayon mono-énergétique de faible largeur traverse cet objet, l'intensité du rayon mesuré à la sortie s'obtient par

$$I = I_0 \exp[-\mu L]$$

où I_0 est l'intensité du rayon à l'entrée, L est la distance parcourue par le rayon, et μ est la constante d'atténuation linéaire de l'objet qui dépend de la densité de matière et de sa composition nucléaire.

Considérons maintenant une section transversale d'un objet non homogène perpendiculaire à l'axe oz , et supposons que les rayons traversent cette section. En caractérisant l'objet par la distribution de sa constante d'atténuation linéaire μ , fonction continue des deux variables d'espace; $\mu(x, y) = f(x, y)$; on a alors

$$\frac{I}{I_0} = \exp \left[- \int_L f(x, y) dl \right]$$

ou bien

$$-\ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \int_L f(x, y) dl$$

où dl est l'élément de longueur sur le parcours L . Ainsi, si on déplace en parallèle l'émetteur (source S) et le récepteur (détecteur D) sur une ligne droite faisant un angle ϕ avec l'axe ox on obtient une projection $p(r, \phi)$:

$$p(r, \phi) = \int_L f(x, y) dl$$

En se référant aux figures 2.2 et 2.2, on voit que cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

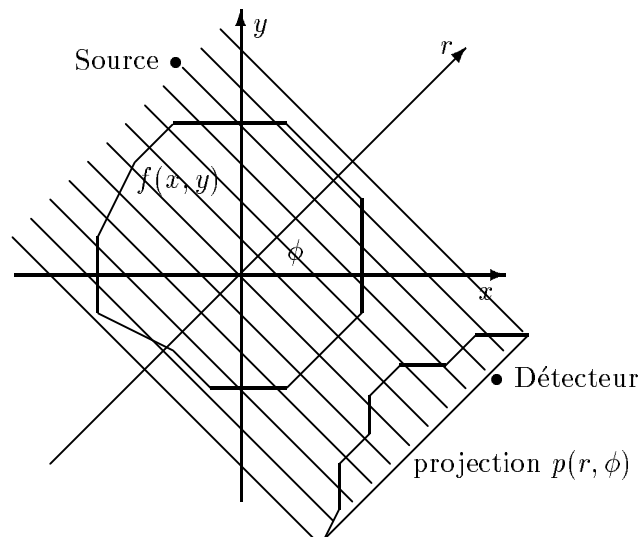


FIG. 2.1 - Tomographie à rayons X

$$p(r, \phi) = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$

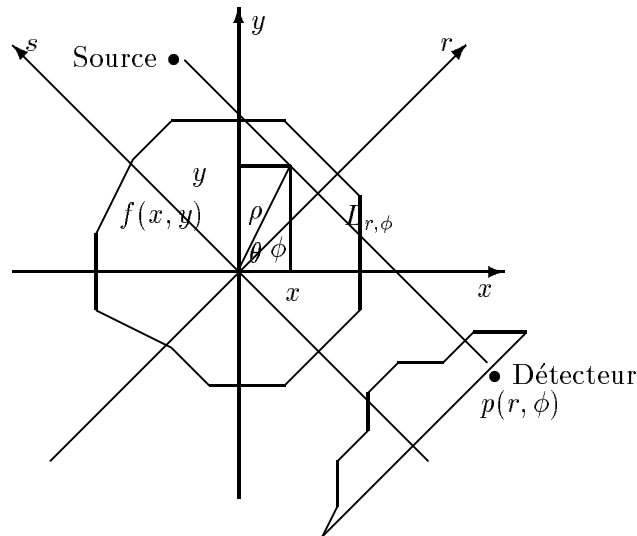


FIG. 2.2 - Notations utilisées pour la définition de la projection $p(r, \phi)$ d'une fonction $f(x, y)$

Pour des variables continues r et ϕ , $p(r, \phi)$ est, par définition, la transformée de Radon de la fonction $f(x, y)$. J. RADON a montré l'existence et l'unicité de cette transformée et de son inverse pour des fonctions continues à supports compacts. Ceci peut être résumé ainsi :

- Si $f(x, y)$ est continue et à support compact, alors $p(r, \phi) = \mathcal{R}\{f(x, y)\}$ est déterminée d'une façon unique par le résultat de l'intégration sur toutes les lignes droites $L_{r, \phi}$ dans le plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, \pi]$.
- La connaissance de $p(r, \phi)$ en tout point $r \in \mathbb{R}$ et $\phi \in [0, \pi]$ permet de déterminer d'une façon unique la fonction $f(x, y)$ par :

$$f(x, y) = \left(-\frac{1}{2\pi^2}\right) \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial r} p(r, \phi)}{(r - x \cos \phi - y \sin \phi)} dr d\phi$$

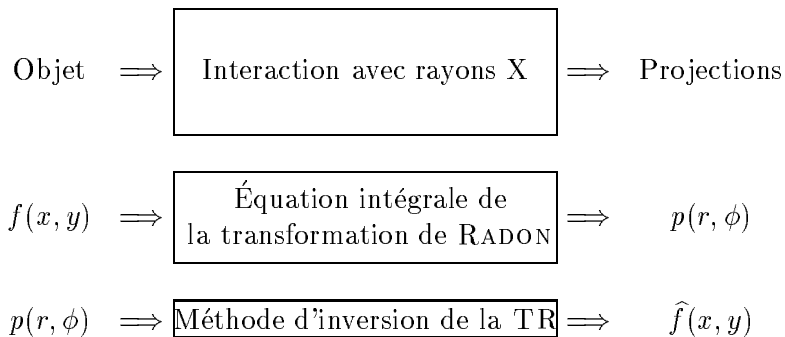


FIG. 2.3 - Reconstruction d'image en tomographie à rayons X

Voici ici un exemple de problème inverse pour lequel nous avons directement une expression analytique pour sa solution et on peut s'imaginer qu'il n'y a plus de problème. En pratique cependant, les mesures sont discrètes. En particulier les projections sont obtenues pour les valeurs discrètes de ϕ . Il est alors plus convenable de dire que chaque projection $p(r, \phi_i)$ nous fournit un échantillonnage de la TR de la fonction $f(x, y)$. La multiplication des projections obtenues dans des conditions différentes nous permet de "remplir" progressivement le domaine de la transformée. Si ce remplissage pouvait être dense et uniforme alors l'inversion pourrait être effectuée par la transformation inverse pour récupérer l'objet. Mais la connaissance de tous les échantillons n'est malheureusement pas possible dans une situation réelle et on ne peut mesurer qu'un sous-ensemble de ces échantillons. Nous verrons que c'est là que se situe la difficulté de la résolution du problème.

Pour mieux comprendre les fondements des méthodes de reconstruction d'image il est utile de noter qu'il existe une relation fondamentale entre la TR et la TF d'une fonction. Elle se résume ainsi :

Si on note par $P(\Omega, \phi)$ la TF de $p(r, \phi)$ par rapport à la variable r :

$$P(\Omega, \phi) = \int p(r, \phi) \exp[-j\Omega r] dr$$

et par $F(\omega_x, \omega_y)$ la TF 2D de $f(x, y)$:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) \exp[-j\omega_x x, \omega_y y] dx dy$$

alors, il est facile de montrer la relation suivante plus connue sous le nom du *Théorème de projection* :

$$F(\omega_x, \omega_y) = P(\Omega, \phi) \quad \text{pour} \quad \omega_x = \Omega \cos \phi \quad \text{et} \quad \omega_y = \Omega \sin \phi$$

Cette relation permet de transformer le problème de la reconstruction d'image $f(x, y)$ à partir de ses projections $p(r, \phi)$ en un problème de *synthèse de FOURIER*, qui consiste à déterminer la fonction $f(x, y)$ à partir d'une connaissance partielle de sa transformée de FOURIER $F(\omega_x, \omega_y)$.

Encore une fois, on peut constater que si l'on pouvait connaître parfaitement toutes les projections on pourrait alors remplir le domaine de FOURIER de l'objet (connaître $F(\omega_x, \omega_y)$) et ensuite par une transformation de FOURIER inverse on pourrait déterminer la fonction $f(x, y)$. Mais, en pratique, ceci est rarement possible et le passage dans le domaine de FOURIER ne change rien.

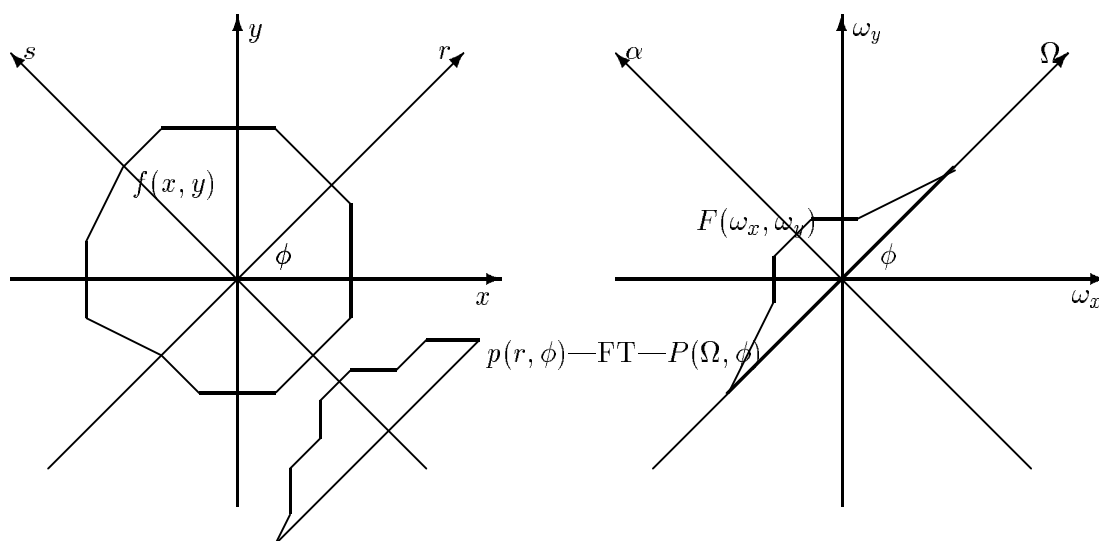


FIG. 2.4 - Théorème de projection : Relation entre la TF 1-D de la projection $p(r, \phi)$ et la TF 2-D de $f(x, y)$

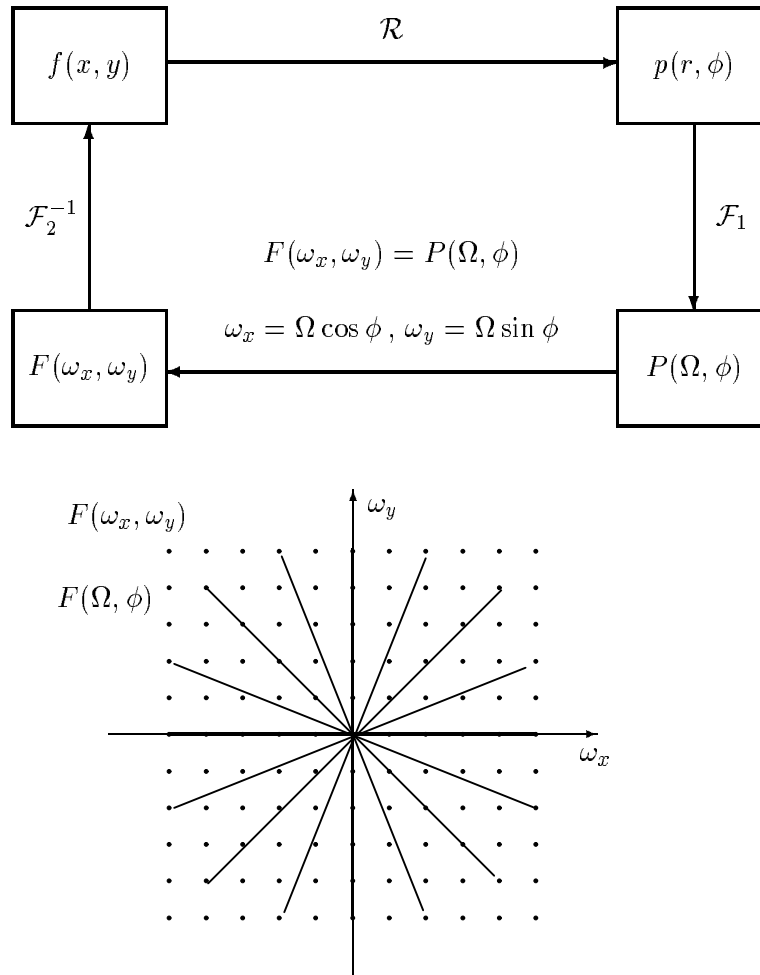


FIG. 2.5 - Reconstruction d'image en tomographie X en passant dans le domaine de FOURIER.

2.3 Imagerie à ondes diffractées : cadre général

D'une manière générale lorsqu'on cherche à *voir* l'intérieur d'un objet (sans le couper), on peut envisager deux procédés :

- soit l'illuminer par une onde (rayons X, ultrasons ou micro ondes) de l'extérieur et mesurer son interaction avec celle-ci; c'est l'imagerie active;
- soit profiter éventuellement de son propre rayonnement lorsque cela est possible (infra rouge, radioactivité) et mesurer les effets de ces rayons à l'extérieur de l'objet; c'est l'imagerie passive.

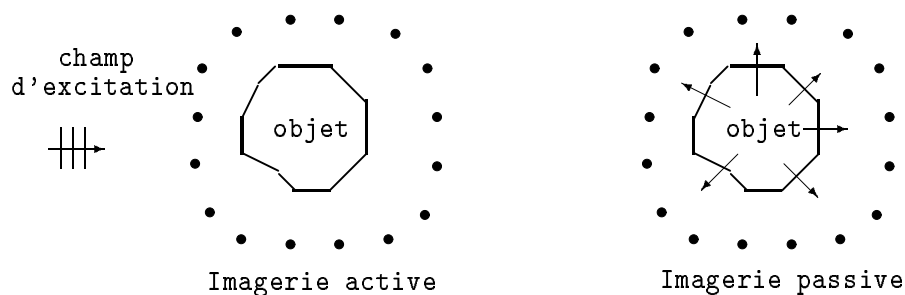


FIG. 2.6 - *Imagerie active et passive.*

Dans le cas d'imagerie active que nous considérons ici, on peut envisager trois cas :

- Imagerie par transmission où la ligne de mesure se trouve du côté opposé du champ incident ;
- Imagerie par réflexion où la ligne de mesure se trouve du même côté que celle du champ incident ;
- Imagerie mixte où les points de mesure se trouvent tout autour de l'objet.

Dans tous les cas, il faut d'abord établir une relation mathématique (modèle) entre ces mesures et une propriété interne de l'objet qui le caractérise, et ensuite inverser cette relation.

D'une manière plus générale, dans toute technique d'imagerie, il y a trois problèmes fondamentaux à résoudre :

- un problème direct, qui consiste à établir un modèle mathématique suffisamment simple décrivant le mieux possible la relation entre les grandeurs mesurées et les grandeurs inconnues auxquelles nous nous intéressons ;
- un problème d'instrumentation, qui consiste à construire un système d'imagerie : générer les ondes, concevoir les capteurs et mesurer les résultats des interactions de l'onde avec l'objet ;

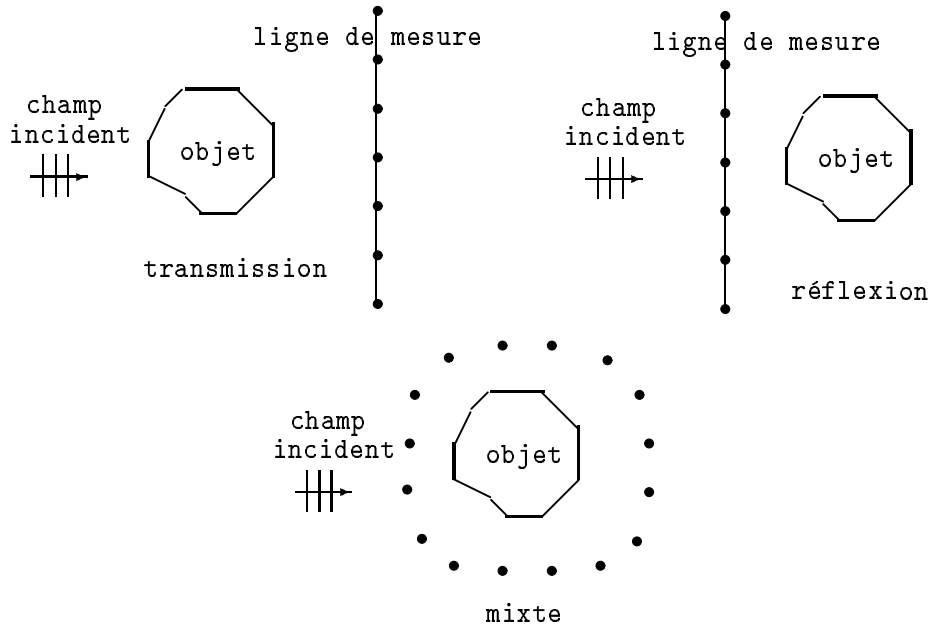


FIG. 2.7 - Différents modes d'imagerie : par réflexion, par transmission et mode mixte.

- un problème inverse, qui consiste à développer des méthodes d'inversion qui, partant des données mesurées, reconstruisent ces images qui caractérisent l'objet étudié. Bien entendu, nous voulons que ces résultats soient, à la fois, robustes vis-à-vis de l'inévitable bruit de mesure et des erreurs d'approximation, de la discrétisation et de la quantification qui sont nécessaires pour le calcul numérique, et qu'ils aient en même temps la plus grande résolution spatiale possible.

Dans la section précédente, nous avons vu comment les rayons X peuvent servir pour obtenir une carte de distribution de la densité de matière à l'intérieur d'un objet. Ici, nous allons voir qu'il est possible de remplacer les rayons X par d'autres types d'ondes, par exemple les ultrasons ou les micro ondes. Mais, en général, contrairement aux rayons X et due au fait que les longueurs d'ondes utilisées sont de l'ordre de dimensions de l'objet, l'établissement d'une relation entre les mesures (champs diffractés) et l'objet devient plus complexe.

Ici, sans entrer trop dans le détail, nous allons décrire le cadre général qui nous permettra d'identifier les problèmes inverses associés.

Lorsqu'un objet $f(\mathbf{r})$ est illuminé par une onde incidente $\phi_0(\mathbf{r})$ le champ total $\phi(\mathbf{r})$ peut être modélisé par la somme du champ incident $\phi_0(\mathbf{r})$ et du champ diffracté $\phi_s(\mathbf{r})$ qui dépend à la fois de l'objet et du champ incident :

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \int_D G_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

et le champ diffracté à l'extérieur de l'objet $g(\mathbf{u})$ que l'on mesure est une fonction de l'objet et du champ total à l'intérieur de l'objet:

$$g(\mathbf{r}') = \int_D G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Dans ces deux équations G_o et G_m sont des fonctions de GREEN. Notons que la première équation est une équation implicite en ϕ et que la deuxième équation est bilinéaire en f et en ϕ .

Le problème de l'imagerie dans ce contexte est de fournir une estimation de $f(\mathbf{r})$ à partir d'un nombre fini de mesures $g(\mathbf{r}'_i), i = 1, \dots, M$. Comme on peut constater, la relation entre g et f n'est pas linéaire, ce qui nous donne un exemple type d'un problème inverse non linéaire.

Le cas de l'approximation de BORN étant la situation de faibles perturbations où l'on peut remplacer $\phi(\mathbf{r})$ par $\phi_0(\mathbf{r})$ dans cette dernière équation. Cette approximation permet d'établir une relation linéaire entre f et g et ainsi transformer le problème inverse non linéaire à un problème inverse linéaire :

$$g(\mathbf{r}') = \int_D G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) \phi_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Par la suite nous allons décrire les techniques d'imagerie basées sur cette approximation.

2.4 Imagerie micro ondes : cas 2D

Pour comprendre les principales idées de l'imagerie à ondes diffractées, nous allons considérer le cas particulier de l'imagerie micro ondes. Nous nous placerons dans le cas d'un problème 2D. Pour cela considérer le cas où un objet cylindrique est illuminé par une onde plane polarisée rectiligne selon l'axe oz.

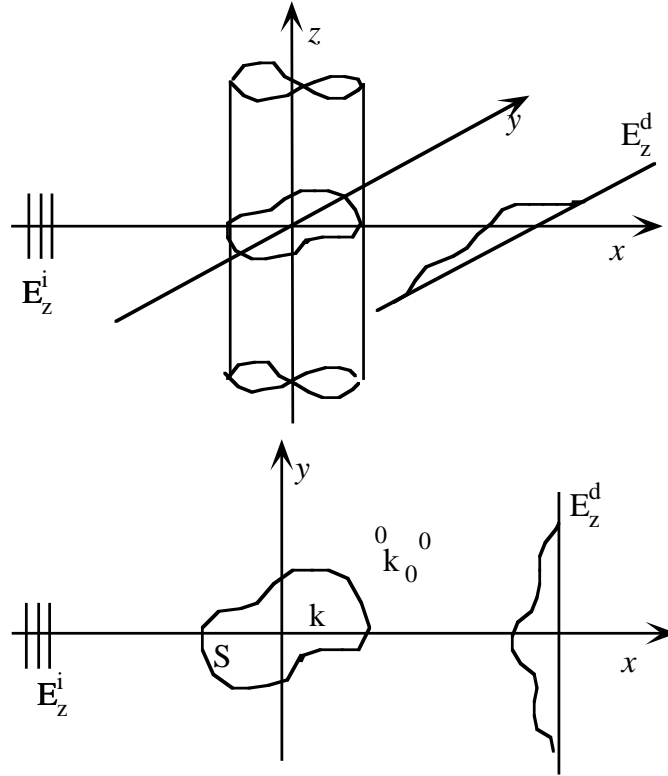


FIG. 2.8 - Géométrie de l'imagerie micro ondes.

Si on fait l'hypothèse que l'objet est homogène suivant l'axe oz ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) alors les champs incident et diffracté n'auront qu'une seule composante et on a les relations suivantes :

$$E_z(\mathbf{r}) = E_z^i(\mathbf{r}) + E_z^d(\mathbf{r})$$

$$E_z^d(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

où

$$J(\mathbf{r}') = [k^2(\mathbf{r}') - k_0^2] E_z(\mathbf{r}') \quad \text{et} \quad k(\mathbf{r}') = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon(\mathbf{r}') - j\omega \mu_0 \sigma(\mathbf{r}')}$$

Deux cas peuvent alors être considérés :

- On s'intéresse à la quantité $J_n(\mathbf{r}') = J(\mathbf{r}')/E_z^i(\mathbf{r}')$ qui représente la densité des courants induits dans l'objet (normalisé par rapport au champ incident) et qui dépend à la fois de l'objet et du champ incident, mais qui a la propriété

$$f(\mathbf{r}') = [k^2(\mathbf{r}') - k_0^2] = 0 \longrightarrow J(\mathbf{r}') = 0.$$

On a alors

$$E_z^d(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J_n(\mathbf{r}') E_z^i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

- On s'intéresse à la quantité $o(\mathbf{r}') = [k^2(\mathbf{r}') - k_0^2]$ qui représente directement l'objet et on a alors

$$E_z^d(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E_z^i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Mais en se mettant dans le cadre de l'approximation de BORN, c'est-à-dire $E_z(\mathbf{r}') \simeq E_z^i(\mathbf{r}')$, alors on a

$$E_z^d(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E_z^i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Dans les deux cas, si on note par $\phi(\mathbf{r}) = E_z^d(\mathbf{r})$, $\phi_0(\mathbf{r}') = E_z^i(\mathbf{r}')$ et par $f(\mathbf{r}')$ soit $J_n(\mathbf{r}')$ soit $o(\mathbf{r}')$, alors les deux problèmes se confondent à

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Maintenant, remplaçant l'expression de la fonction de GREEN dans le cas 2D :

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{j}{4} k_0^2 H_0(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

Regardant de plus près cette équation on constate qu'il s'agit d'une opération de convolution entre $G(\mathbf{r})$ et le produit $f(\mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}')$. Passant dans le domaine de FOURIER on a

$$\text{TF}\{\phi\} = \text{TF}\{G\} \quad [\text{TF}\{f\} * \text{TF}\{\phi_0\}]$$

ou encore

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{G}(\boldsymbol{\omega}) \left[\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) * \widehat{\phi}_0(\boldsymbol{\omega}) \right]$$

et où

$$\widehat{G}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{k_0^2}{k_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \omega^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2.$$

Supposons maintenant que le champ incident est une onde plane se propageant en direction de l'axe ox : $\phi_0 = \exp[j\mathbf{k}_0 \mathbf{r}]$ avec $\mathbf{k}_0 = [k_0, 0, 0]$, on a alors :

$$\widehat{\phi}_0(\boldsymbol{\omega}) = \delta(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}_0)$$

et

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{k_0^2}{k_0^2 - \omega^2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}_0)$$

Ainsi, il y a une relation entre la TF spatiale de l'objet et la TF spatiale du champ diffracté. Mais pour être plus précis, mettons nous dans le cas 2D où l'on mesure le champ diffracté sur une ligne droite perpendiculaire à la direction de propagation du champ incident. On peut alors montrer la relation suivante :

$$\widehat{f}(\omega_x = -k_0 + \sqrt{k_0^2 - \omega_y^2}, \omega_y) = \widehat{\phi}(\omega_y)$$

En d'autres termes, les valeurs de la TF 1D du champ diffracté mesuré sur une ligne droite perpendiculaire à la direction de propagation d'une onde plane, sont égales aux valeurs de la TF 2D de l'objet sur un demi-cercle de rayon k_0 centré au point $\mathbf{k} = (k_0, 0)$ (voir

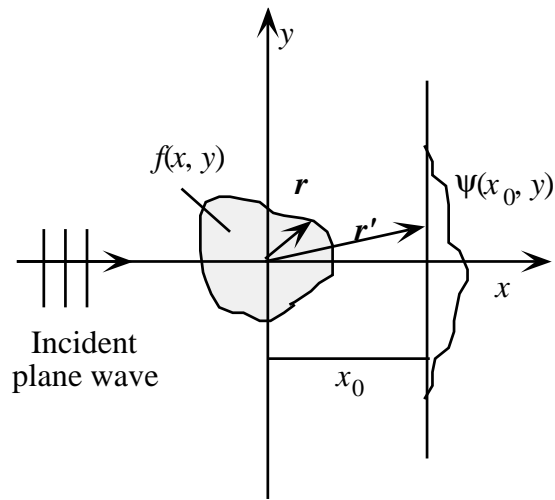


FIG. 2.9 - Géométrie de la tomographie de diffraction 2D.

figure). Évidemment, lorsque la direction de propagation fait un angle θ avec l'axe ox , on a la même relation, sauf que le demi-cercle aussi sera tourné d'un angle θ .

La mise en évidence de cette relation permet de transformer le problème de la reconstruction d'objet $f(x, y)$ à partir de mesures des champs diffractés $\phi(r, \theta_i)$ en un problème de synthèse de FOURIER qui consiste en la détermination de $f(x, y)$ à partir d'une connaissance partielle de sa TF. De plus, on peut faire l'analogie avec le problème de la reconstruction d'image en tomographie X. En effet en tomographie X, les projections nous fournissaient les valeurs de la TF de l'objet sur des lignes droites, alors qu'ici, les champs diffractés nous fournissent les valeurs de la TF de l'objet sur des demi-cercles dont le rayon est inversement proportionnel à la longueur d'onde utilisée.

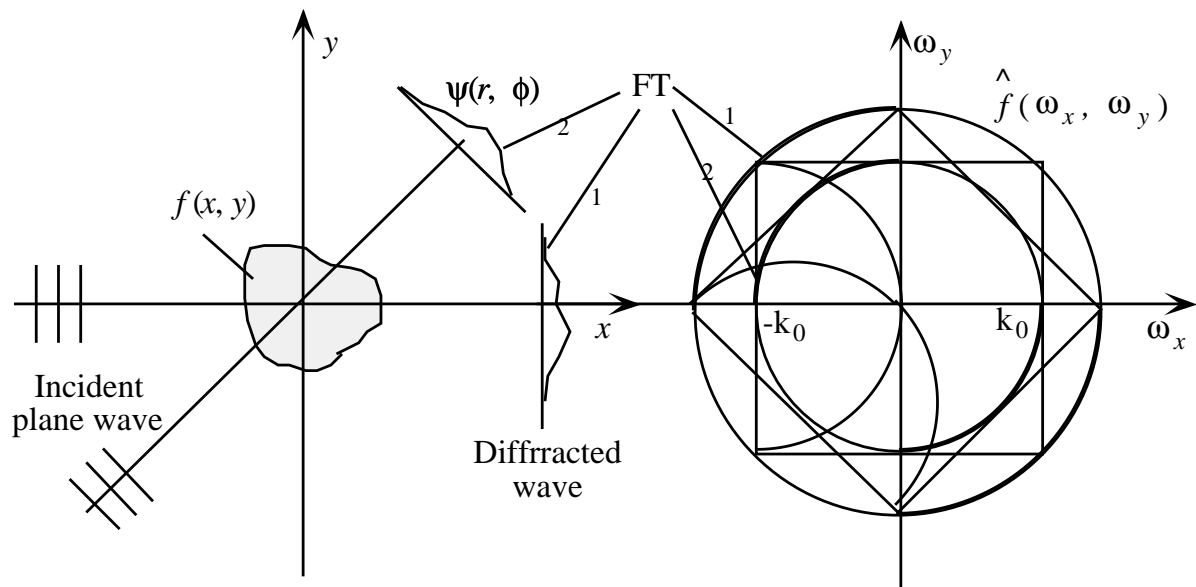


FIG. 2.10 - Synthèse de FOURIER en tomographie de diffraction 2D.

2.5 Imagerie micro ondes : cas 3D

Les mêmes raisonnements et les mêmes équations peuvent être obtenues dans le cas de l'imagerie 3D, si l'onde incidente est plane et si le plan sur lequel les mesures du champ diffracté sont effectuées, on aura la même relation dans le cas 3D.

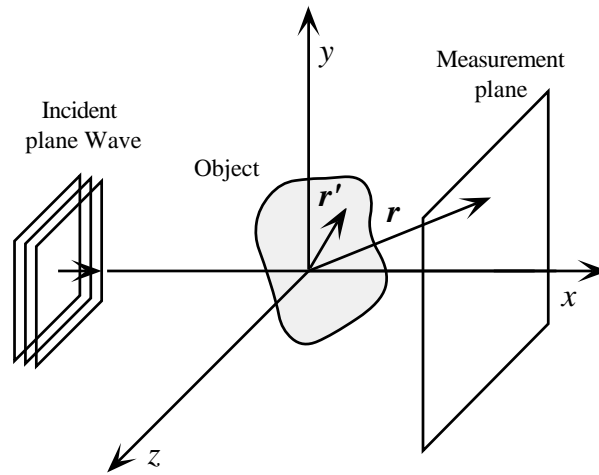


FIG. 2.11 - Géométrie de la tomographie de diffraction 3D.

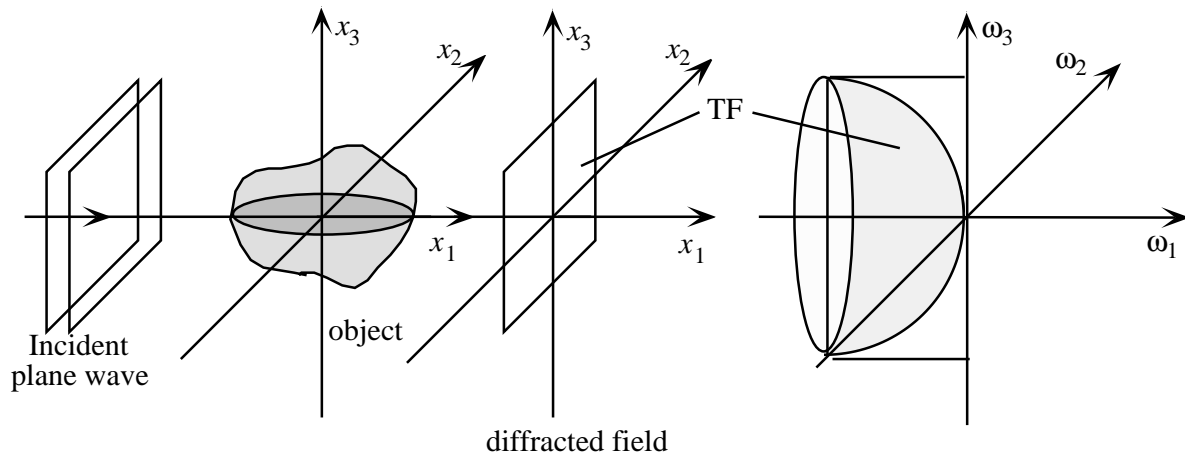


FIG. 2.12 - Synthèse de FOURIER en tomographie de diffraction 3D.

2.6 Imagerie par courants de FOUCAULT

Les techniques de contrôle non destructif utilisent couramment les courants de FOUCAULT pour détecter une anomalie dans un milieu conducteur. L'imagerie par courants de FOUCAULT est plus récente. Son objectif est, une fois une anomalie détectée, de fournir une image qui représente la variation de la conductivité à l'intérieur d'un objet conducteur. Cette image peut alors être utilisée pour fournir un diagnostic plus précis sur le défaut.

Bien que les fréquences utilisées pour exciter l'objet par cette technique sont de l'ordre du kHz à MHz, on peut encore utiliser le cadre général développé en imagerie micro ondes pour obtenir des équations liant l'objet aux mesures. Trois différences importantes cependant existent :

- En tomographie de diffraction, en général, l'objet étudié est dans un milieu homogène où se trouvent les capteurs (émetteurs et récepteurs). En imagerie par courants de FOUCAULT le défaut se trouve à l'intérieur d'un milieu homogène (bloc métallique), qui est différent du milieu où se trouvent les capteurs (air).
- En tomographie de diffraction, en général, on peut négliger l'atténuation des ondes, alors qu'en imagerie par courants de FOUCAULT cela n'est pas le cas. En effet, les ondes se propagent dans un milieu conducteur où les deux phénomènes de diffusion et de propagation sont d'importance égale (la constante de propagation est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont de même ordre de grandeur).
- En tomographie de diffraction, en général, on peut tourner autour de l'objet, ce qui permet de remplir le domaine de FOURIER de l'objet. En imagerie par courants de FOUCAULT, en général, il n'est pas possible de tourner autour de l'objet. C'est pourquoi, ici, on modifie la fréquence temporelle du champ d'excitation pour obtenir des données complémentaires, ce qui permet dans un sens de remplir partiellement le domaine de FOURIER de l'objet.

Pour donner une description simple de cette technique considérons le cas 2D de la figure (2.6).

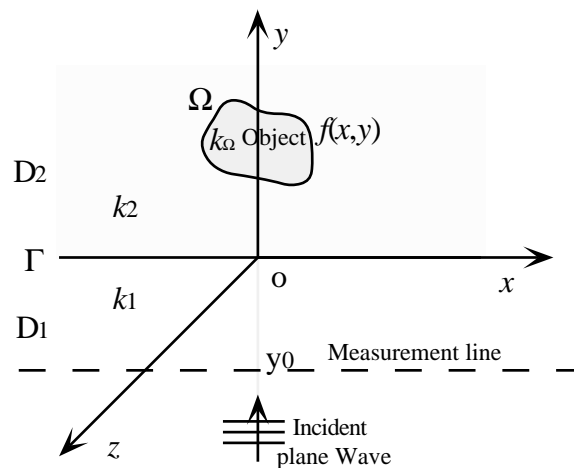


FIG. 2.13 - Géométrie de l'imagerie par courants de FOUCAULT.

Supposons que le milieu conducteur est suffisamment épais et que le défaut se trouve près de la surface pour ne considérer que deux milieux D_1 (air) et D_2 (métal) avec une interface que nous supposerons plane. Supposons aussi que la région D_2 est amagnétique. Partant des équations de Helmholtz, on peut obtenir une équation intégrale liant la composante normale du champ électrique E_z ou les composantes tangentielles du champ magnétique (H_x et H_y) aux sources de courants induites par le défaut. Pour cela, nous noterons :

- \vec{E}_0, \vec{H}_0 , les champs électrique et magnétique en l'absence du défaut ;
- \vec{E}_f, \vec{H}_f , les champs en présence du défaut ;
- $\vec{E}_s = \vec{E}_0 - E_f, \vec{H}_s = \vec{H}_0 - \vec{H}_f$, les différences des champs en l'absence et en présence du défaut ;
- $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, la constante de propagation dans la région R_1 ;
- $k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + j\omega \mu_0 \sigma_0 \simeq j\omega \mu_0 \sigma_0$, la constante de propagation dans la région R_2 ;
- $k_\Omega^2(x, y) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + j\omega \mu_0 \sigma(x, y)$, la constante de propagation dans la région du défaut ;
- $f(x, y) = \frac{k_2^2 - k_\Omega^2(x, y)}{k_2^2}$, la fonction du contraste qui caractérise le défaut ;
- $J_\Omega(x, y) = k_2^2 f(x, y) E(x, y)$, les sources de courants équivalentes induites dans le défaut ;
- $J_{\Omega_n}(x, y) = \frac{J_\Omega(x, y)}{E_0(x, y)}$, une quantité normalisée par rapport au champ incident E_0 .

On peut alors montrer que le champ d'anomalie mesuré sur des capteurs placés sur une ligne droite $y = y_0$ parallèle à la surface de l'interface Γ s'écrit :

$$E_s(x, y_0) = \iint J_\Omega(x', y') G(x - x', y_0 - y') dx' dy'$$

Supposant aussi que le champ incident est une onde plane se propageant dans la direction perpendiculaire de l'interface Γ , on peut écrire :

$$E_0(x, y) = E_0(y) = \begin{cases} \exp[+jk_1 y] + R \exp[-jk_1 y] & y > 0 \\ T \exp[+jk_2 y] & y < 0 \end{cases}$$

où R et T sont des coefficients de réflexion et de transmission.

Par la suite, pour être bref, remplaçant l'expression de $E_0(x, y)$ et l'expression de la fonction de GREEN dans l'équation du champ d'anomalie, on peut montrer la relation suivante :

$$\hat{E}_s(u, y_0) = \frac{2T}{\delta^2} \frac{\exp[-j\beta_1 y_0]}{\beta_1 + \beta_2} \iint_\Omega f(x', y') \exp[-j[ux' - (k_2 + \beta_2)y']] dx' dy',$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{\delta^2 (\beta_1 + \beta_2)}{2T \exp[-j\beta_1 y_0]} \hat{E}_s(u, y_0) = \iint_\Omega f(x', y') \exp[-j[ux' - (k_2 + \beta_2)y']] dx' dy'$$

où :

$$\widehat{E}(u, y_0) = \text{TF1D}\{E_s(x, y_0)\} = \int E_s(x, y_0) \exp[-jux] dx$$

et

$$\begin{aligned} T &= \frac{2k_1}{k_1+k_2} \simeq \frac{2k_1}{k_2}, & \delta &= \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \\ k_1^2 &= \omega^2\mu\epsilon, & k_2^2 &= \omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma \simeq j\omega\mu\sigma, \quad k_2 = \frac{1}{\delta}(1+j) \\ \beta_1 &= \sqrt{k_1^2 - u^2}, & \beta_2 &= \sqrt{k_2^2 - u^2} \\ f(x, y) &= \frac{k_2^2 - k^2(x, y)}{k_2^2} \simeq -\frac{\sigma(x, y) - \sigma_0}{\sigma_0} \end{aligned}$$

Pour mieux interpréter ces équations, notons par

$$s = k_2 + \beta_2 = k_2 + \sqrt{k_2^2 - u^2}$$

et par

$$\widehat{f}(u, s) = \text{TFL}\{f(x, y)\} = \iint_D f(x, y) \exp[-jux - sy] dx dy.$$

la transformée de FOURIER-LAPLACE (TFL) de $f(x, y)$. On a alors :

$$\widehat{E}_s(u, y_0) = \frac{2T \exp[-j\beta_1 y_0]}{\delta^2 (\beta_1 + \beta_2)} \widehat{f}(u, s)$$

Ainsi, les différentes mesures du champs $E_s(x, y_0)$ à des fréquences temporelles ω_i différentes, nous fournit des valeurs de la TFL de l'objet $\widehat{f}(u, s)$ pour les différentes valeurs de u et de s . Le problème devient ainsi celui de la *synthèse de FOURIER-LAPLACE* qui consiste en la détermination de la fonction $f(x, y)$ à partir d'une connaissance partielle des valeurs de sa TFL.

Le travail avec la TFL n'étant pas facile, on peut envisager des approximations :

1. Négliger entièrement l'atténuation :

Il s'agit de négliger la partie imaginaire de k_2 et la partie réelle de s , c'est à dire :

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{\delta}(1+j) \simeq \frac{1}{\delta} \\ s &= k_2 + \beta_2 = k_2 + \sqrt{k_2^2 - u^2} \simeq \frac{1}{\delta} + \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - u^2} \simeq \frac{1}{\delta} \left(1 + \sqrt{1 - (\delta u)^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\widehat{E}_s(u, y_0) = \frac{2T \exp[-j\beta_1 y_0]}{\delta^2 (\beta_1 + \beta_2)} \widehat{f}\left(u, v = -\frac{1}{\delta} \left(1 + \sqrt{1 - (\delta u)^2}\right)\right)$$

où $\widehat{f}(u, v)$ est la TF2D de $f(x, y)$.

2. Négliger partiellement l'atténuation :

Il s'agit de négliger la partie imaginaire de $\beta_2 = \sqrt{k_2^2 - u^2}$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} s &\simeq k_2 + \mathcal{I}m(\beta_2) = k_2 + \mathcal{I}m\left(\sqrt{k_2^2 - u^2}\right) \\ &= \frac{1}{\delta}(1+j) + \mathcal{I}m\left(\sqrt{j\frac{2}{\delta^2} - u^2}\right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{4 + (\delta u)^4} - (\delta u)^2}\right] + j\frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

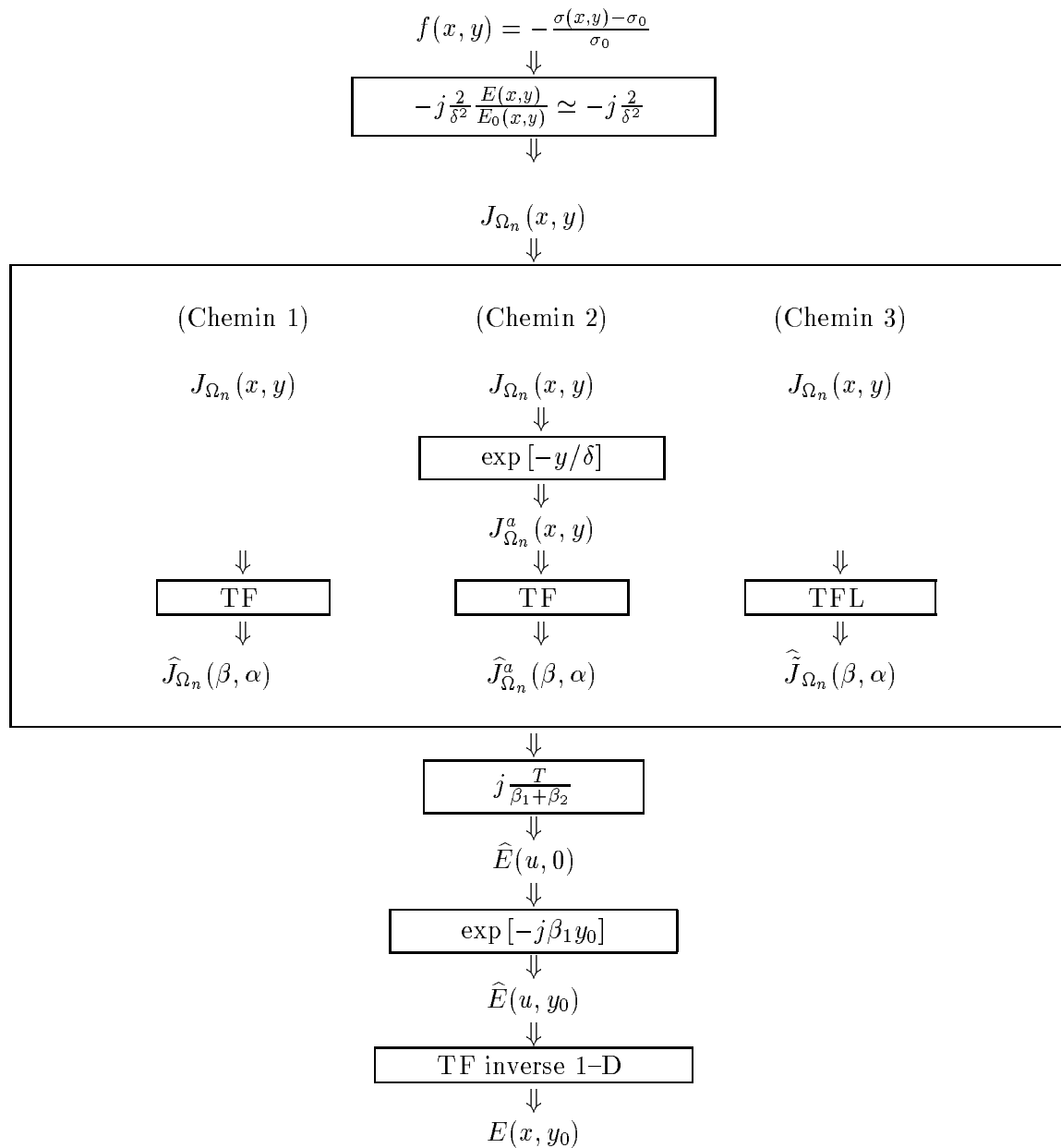
ce qui nous permet d'écrire :

$$\hat{E}_s(u, y_0) = \frac{2T \exp[-j\beta_1 y_0]}{\delta^2 \beta_1 + \beta_2} \hat{f}\left(u, v = -\frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{4 + (\delta u)^4} - (\delta u)^2}\right)\right)$$

où $\hat{f}(u, v)$ est la TF2D de $f(x, y)$.

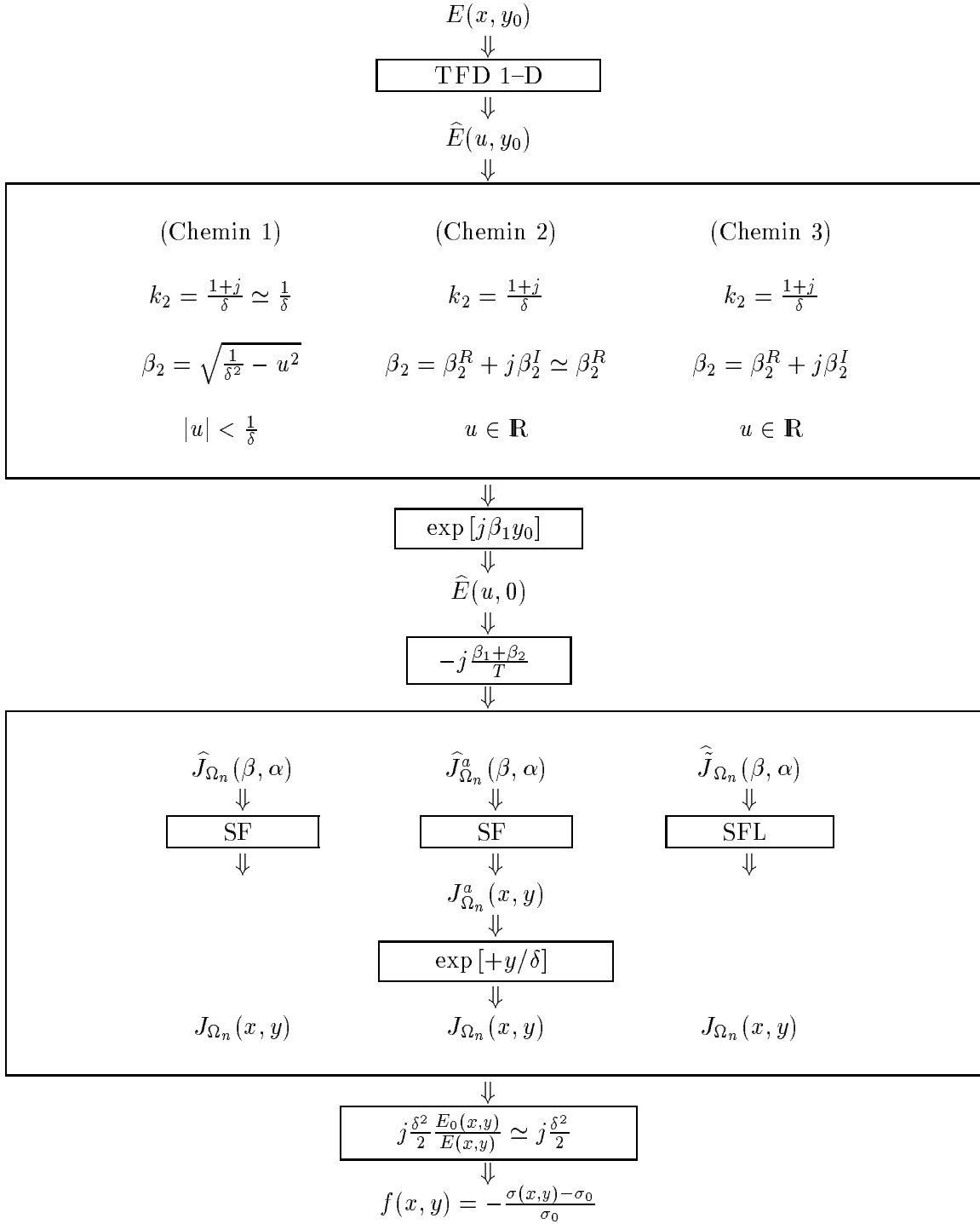
On peut résumer ces différentes situations dans le schéma bloc suivant:

Le schéma bloc de différentes approximations du problème direct en imagerie par courants de FOUCAULT.



Lors de l'inversion on doit effectuer le trajet inverse. Ceci est résumé dans le schéma bloc suivant :

Le schéma bloc des différentes étapes de l'inversion en imagerie par courant de FOUCAULT.



Ainsi les étapes qui nous permettent de simuler le problème direct de l'imagerie par courants de FOUCAULT sont :

- Calculer la source de courant normalisée

$$J_{\Omega_n}(x, y) = -j \frac{2}{\delta^2} \frac{E(x, y)}{E_0(x, y)} f(x, y)$$

- Suivant les trois chemins :

- calculer la TF de $J_{\Omega_n}(x, y)$ sur des contours algébriques définis par :

$$\begin{cases} u = \alpha \\ v = -\frac{1}{\delta} \left[1 + \sqrt{1 - (\delta\alpha)^2} \right] \end{cases} ,$$

- calculer la TF de $J_{\Omega_n}(x, y) \exp[-\frac{y}{\delta}]$ sur des contours algébriques définis par :

$$\begin{cases} u = \alpha \\ v = -\frac{1}{\delta} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\delta u)^4 + 4} - (\delta u)^2} \right] \end{cases} ,$$

- calculer la TFL de $J_{\Omega_n}(x, y)$ sur des contours algébriques définis par :

$$\begin{cases} u = \alpha \\ v = -j \left[k_2 + \sqrt{k_2^2 - \alpha^2} \right] \end{cases}$$

- Calculer $\hat{E}(u, 0)$ à partir de l'une des quantités calculées dans l'étape précédente :
- Calculer $E(x, 0)$ et finalement $E(x, y_0)$.

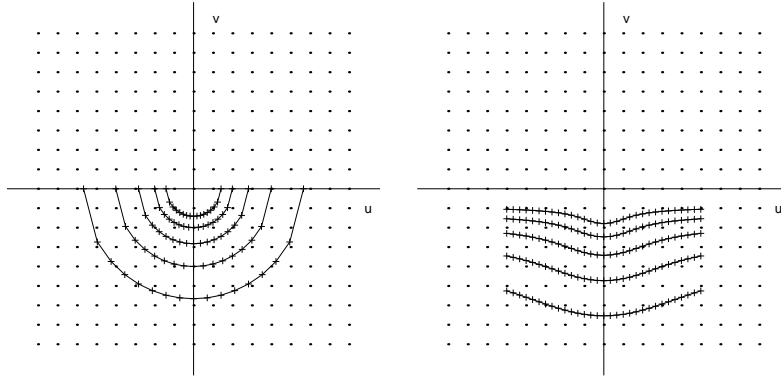


FIG. 2.14 - Synthèse de FOURIER en imagerie par courants de FOUCAULT.

2.7 Imagerie à émission de positons

En médecine nucléaire l'objectif de la tomographie d'émission est de déterminer la distribution d'un isotope radioactif d'une substance existante ou injectée dans le corps en mesurant le nombre de photons émis par ces substances.

Il existe deux types de tomographie à émission dépendant du type d'isotope utilisé:

- Tomographie à émission de positons (TEP): le radioélément est un émetteur de positons, qui après un parcours moyen très restreint va interagir avec la matière, de manière à émettre deux rayonnements gamma à 180 degrés l'un de l'autre. Le système de détection devra mesurer le nombre de photons qui coïncident, c'est à dire estimer la présence d'un positon par la détection simultanée des deux rayonnement gamma sur deux détecteurs opposés.
- Tomographie à émission d'un seul photon (SPECT): le radioélément est un émetteur gamma ordinaire, dit mono photonique, qui émet son rayonnement dans tous les sens. À la détection, l'ensemble des collimateurs mesurent dans une direction donnée le rayonnement émis. Ce type d'imagerie est appelé SPECT, de l'anglais (Single Photon Emitter Computed Tomographie).

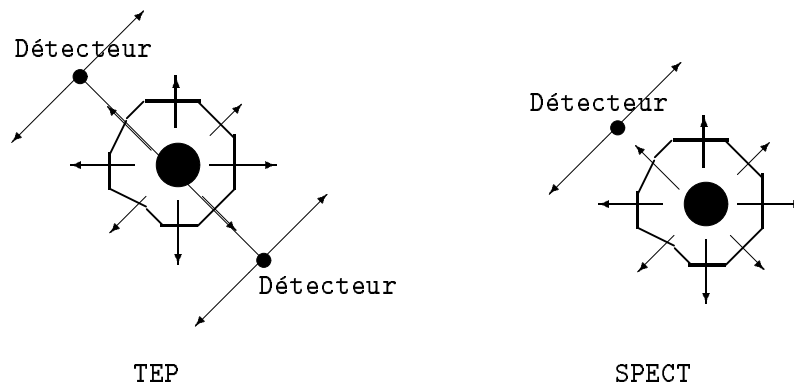


FIG. 2.15 - *Principe de la tomographie d'émission: TEP et SPECT.*

Dans la tomographie à émission de positons, le positon éjecté perd une très grande partie de son énergie dans une distance de quelques millimètres et forme un rayon gamma en rencontrant un électron se trouvant sur son chemin. Cette rencontre se produisant presque au repos, chaque rayon gamma a une énergie de 0.511 MEV et les photons émis repartent dans des directions opposées sur une ligne droite. Si un ensemble de détecteurs en anneau est placé autour de l'objet, deux détecteurs se trouvant face à face sur cette ligne, détecteront simultanément une énergie de 0.511 MEV. Ainsi, la direction des émissions est connue et les nombres de photons par unité de temps mesurés par chaque détecteur est une mesure de la concentration totale des substances radioactives le long de la ligne reliant les deux détecteurs.

Ainsi un modèle simple reliant la distribution de la densité de la matière radioactive

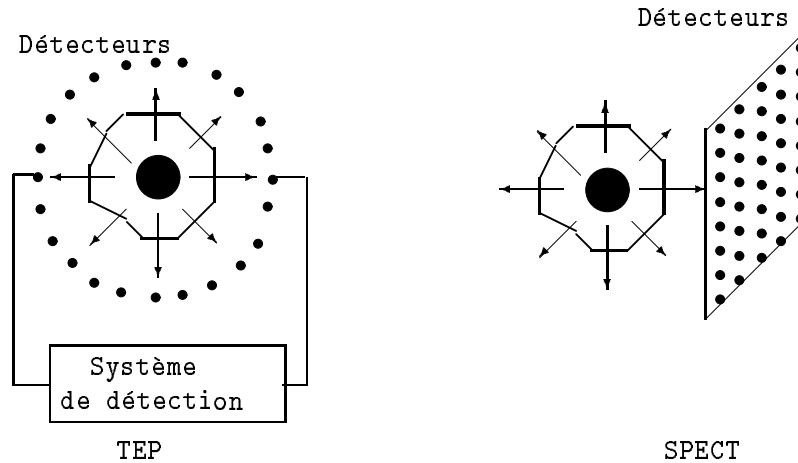


FIG. 2.16 - *Système de mesures en tomographie d'émission : TEP et SPECT.*

$f(x, y)$ aux mesures est :

$$p(r, \phi) = \int f(x, y) dl$$

Bien entendu, dans des situations réelles, on ne peut pas négliger l'atténuation et un modèle plus approprié est :

$$p(r, \phi) = \int f(x, y) a(x, y) dl$$

où $a(x, y)$ est une fonction dépendant de la densité de la matière $f(x, y)$. Le problème est donc non linéaire. Une manière de traiter ce problème est, de supposer dans un premier temps $a(x, y)$ constant et estimer alors $f(x, y)$, puis déterminer $a(x, y)$ par un filtrage passe-bas de $f(x, y)$ et recommencer (linéarisations successives).

Une autre différence entre la tomographie à rayons X et la TEP est que dans la première les détecteurs utilisés sont des photomultiplicateurs qui, sous l'action du flux de photons importants que représente le rayonnement X de la source, fournissent sur un temps court une réponse intégrée, c'est à dire, un courant. Dans ces conditions, le rôle des fluctuations statistiques est faible et le rapport signal à bruit est élevé. Alors qu'en tomographie d'émission les détecteurs sont des compteurs à scintillation qui fournissent des impulsions individualisées liées à des flux de photons faibles, dont le taux est soumis à des fluctuations statistiques importantes.

2.8 Imagerie à résonance magnétique nucléaire RMN

L'énergie magnétique du moment nucléaire $\vec{\mu}$ dans un champ magnétique extérieur \vec{H} est de la forme :

$$E = - \vec{\mu} \cdot \vec{H}$$

À l'équilibre thermique, l'aimantation macroscopique $\vec{\mu}$ d'un ensemble de N spins nucléaires identiques est parallèle au champ extérieur. Si $\vec{\mu}$ est écarté de son orientation d'équilibre (en le soumettant à une impulsion de radiofréquence) d'un angle θ , son évolution ultérieure consistera en une précession autour du \vec{H} de fréquence $\omega_0 = \gamma |\vec{H}|$ où γ est le rapport gyromagnétique et ω_0 est la fréquence de Larmor. Du fait de la relaxation transversale l'amplitude du signal de précession libre décroît exponentiellement au cours du temps.

Le principe de base de l'imagerie est d'observer le signal de précession libre en présence d'un gradient statique du champ magnétique, superposé au champ statique homogène principal. Comme la fréquence de Larmor en chaque point est proportionnelle au champ en ce point, l'utilisation d'un gradient réalise un codage de la position par la fréquence.

Considérons un échantillon macroscopique entouré d'une bobine de résonance. Après une impulsion de $\theta = \pi/2$ modifiant la direction du champ magnétique d'un angle de $\pi/2$, le signal de précession libre que l'on observe provient de tous les spins de cette espèce dans l'échantillon. L'objectif de l'imagerie RMN est d'obtenir, séparément, la contribution à ce signal des divers points de l'échantillon.

À la suite d'une impulsion de $\theta = \pi/2$ à la fréquence ω , les aimantations transversales de chaque point de l'échantillon sont toutes parallèles à une direction ox du référentiel tournant à la fréquence ω . Appliquant, ensuite, un gradient $\mathbf{G}(t)$ dans le référentiel tournant à la fréquence ω , on mesure un signal de précession libre $s(t)$ qui nous fournit des renseignements sur la distribution spatiale de la densité de spin magnétique dans l'objet.

Le cas idéal le plus simple est celui d'un objet linéaire (la distribution de la densité de spin dans l'objet variant linéairement le long de l'axe) : le gradient étant connu, il suffit de calculer la transformée de FOURIER du signal de précession libre, dont l'amplitude à chaque fréquence donne la contribution de chaque point au signal.

Dans le cas plus général d'un objet à deux ou trois dimensions, on peut montrer qu'il y a un lien entre le signal temporel de précession libre $s(t)$ et la distribution de la densité de spin magnétique dans l'objet $f(\mathbf{r})$ qui est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = \iiint f(\mathbf{r}) \exp \left[j \left(\int \mathbf{G}(t') \cdot \mathbf{r} dt' \right) \right] \exp \left[\frac{-t}{T} \right] dx dy dz$$

Le terme $\exp \left[\frac{-t}{T} \right]$ est due à l'effet de la relaxation transversale.

Cette relation peut être résumée par le schéma suivant :

où $S(\omega)$ est la transformée de FOURIER temporelle de $s(t)$ (une distribution de fréquences temporelles) et $F(\mathbf{k})$ est la transformée de FOURIER spatiale de $f(\mathbf{r})$.

En coordonnées cartésiennes on a :

$$s(t) = \iiint f(x, y, z) \exp [j(k_x(t)x + k_y(t)y + k_z(t)z)] \exp \left[\frac{-t}{T} \right] dx dy dz$$

où

$$k_x(t) = \gamma \int_0^t G_x(t') dt', \quad k_y(t) = \gamma \int_0^t G_y(t') dt', \quad k_z(t) = \gamma \int_0^t G_z(t') dt'$$

et où $G_x(t)$, $G_y(t)$ et $G_z(t)$ sont les composantes du gradient du champ magnétique au point (x, y, z) .

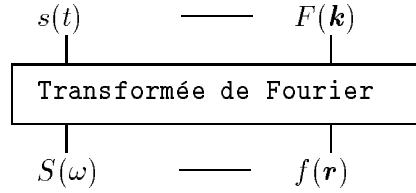


FIG. 2.17 - Principe de l'imagerie RMN.

Ainsi, à un instant donné $s(t)$ est proportionnelle à la valeur de la TF spatiale 3D de $f(x, y, z)$ au point correspondant $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Ainsi, en changeant les trois composantes $G_x(t)$, $G_y(t)$ et $G_z(t)$ du gradient du champ magnétique on peut remplir le domaine de FOURIER de l'objet.

Simplifions ces relations pour le cas d'un problème en 2D et négligeons pour l'instant le terme exponentiel. On a ainsi

$$s(t) = \iint f(x, y) \exp[j(k_x(t)x + k_y(t)y)] dx dy$$

$$F(u, v) = \iint f(x, y) \exp[j(ux + vy)] dx dy$$

$$s(t) = F(u, v), \forall u = k_x(t), \quad v = k_y(t)$$

L'organisation des séquences d'observation doit donc être agencée de façon à fournir une carte complète de l'espace réciproque de l'objet étudié. Deux méthodes sont actuellement d'usage.

Dans la première, on applique un gradient de champ constant et on répète l'expérience en changeant chaque fois son orientation. Le signal complexe de précession libre $s(t)$ à chaque instant d'échantillonnage t nous fournit donc deux points de l'espace réciproques de l'objet dans la direction du gradient. La carte de l'espace de FOURIER de l'objet ainsi obtenue est de la même forme que dans la tomographie à rayons X, mais ici la grandeur mesurée nous fournit directement ces renseignements.

On constate que ces points divergent le long des rayons. L'obtention d'une bonne densité des points aux grandes valeurs de $|\mathbf{k}|$ s'accompagne d'une densité bien plus grande aux faibles valeurs de $|\mathbf{k}|$, autrement dit, l'obtention d'une bonne résolution à courte distance s'accompagne d'une sur-information à grande distance et vis versa.

Cette méthode est actuellement supplantée par une méthode dite de codage de phase dont le principe est le suivant : Après l'impulsion de $\pi/2$, on applique pendant un temps t un gradient G_y , sans effectuer d'observation; on annule, ensuite, le gradient G_y et on applique un gradient G_x . On observe alors le signal en fonction du temps t , durant un intervalle du temps T , suivant cette commutation du gradient. Le signal observé est:

$$s(t) = \iint f(x, y) \exp[jG_x x + G_y y] dx dy = F(-G_x t, -G_y t).$$

En modifiant la valeur du gradient G_y on remplit l'espace de FOURIER directement sur des coordonnées cartésiennes. Cependant à cause de la limitation de la valeur du gradient G_y , et l'amplitude décroissante de $s(t)$, due à l'effet de la relaxation, le remplissage reste incomplet.

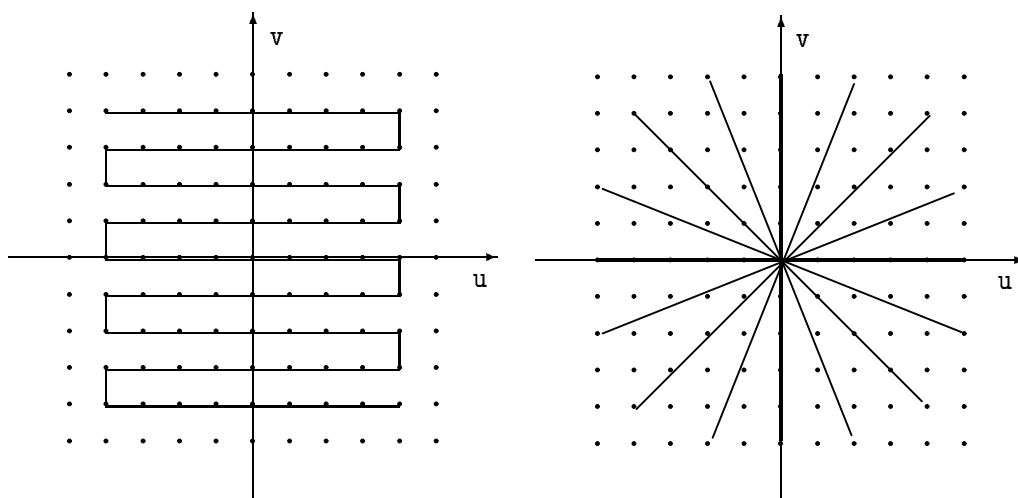


FIG. 2.18 - Modes de remplissage du domaine de FOURIER en imagerie RMN.

2.9 Imagerie radar à ouverture synthétique : SAR

L'imagerie radar à focalisation synthétique est basée sur le principe de l'effet DOPPLER. On peut montrer que le signal DOPPLER après détection synchrone et filtrage nous renseigne sur l'intersection avec une ligne droite de la TF spatiale en 2-D de l'objet illuminé par des ondes radar. Par exemple si l'on se place dans la géométrie de la figure (2.9), en supposant que h est petit, et si on modélise la réflectivité de l'objet par une fonction complexe $f(x, y) = |f(x, y)| \exp[j\phi(x, y)]$ et si le signal émis $s(t)$ est une impulsion modulée linéairement en fréquence de la forme

$$s(t) = \begin{cases} \exp[j(\omega_0 t + at^2)] & |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

alors le signal reçu est de la forme

$$r_\theta(t) = A \int_{-L}^L p_\theta(x') s\left(t - \frac{2(R+x')}{c}\right) dx'$$

où

$$p_\theta(x') = \int f(x' \cos \theta - y' \sin \theta, x' \sin \theta + y' \cos \theta) dy'.$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'équation précédente et en notant $\tau_0 = \frac{2R}{c}$, le signal reçu, après la détection synchrone et filtrage passe-bas, est de la forme :

$$c_\theta(t) = \frac{A}{2} \int_{-L}^L p_\theta(x') \exp\left[-j\frac{2}{c}(\omega_0 + 2a(t - \tau_0))x'\right] dx'$$

Cette équation nous montre que le signal mesuré $c_\theta(t)$ est relié à la TF de la projection $p_\theta(x')$ par

$$c_\theta(t) = \frac{A}{2} P_\theta\left(\frac{2}{c}(\omega_0 + 2a(t - \tau_0))\right).$$

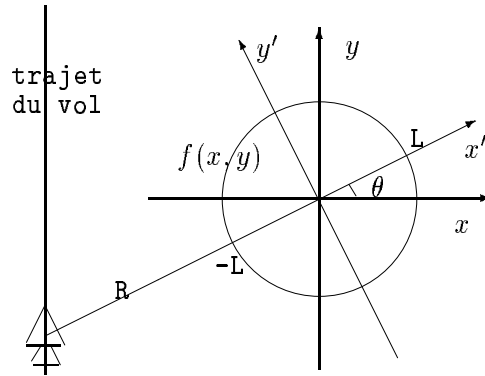


FIG. 2.19 - La géométrie de l'imagerie radar.

Ce signal est disponible pour $-\frac{T}{2} + \frac{2(R-L)}{c} \leq t \leq \frac{T}{2} + \frac{2(R+L)}{c}$, ce qui veut dire que l'on dispose pour chaque projection de données sur la TF spatiale de l'objet dans un intervalle $[k_{x_1}, k_{x_2}]$ donné par

$$k_{x_1} = \frac{2}{c}(\omega_0 - aT + \frac{4aL}{c}) \leq k_x \leq k_{x_2} = \frac{2}{c}(\omega_0 + aT - \frac{4aL}{c})$$

De plus l'angle θ est en général limité à $|\theta| \leq \theta_M$. Ainsi l'ensemble des signaux mesurés nous fournit des renseignements sur $F(k_x, k_y)$ sur un anneau comme le montre la figure 2.20 Dans des applications pratiques on a en général $\omega_0 aT \gg \frac{4aL}{c}$, ce qui veut dire que k_{x_1} et k_{x_2} sont proportionnels respectivement à la fréquence la plus petite et à la fréquence la plus grande dans le signal émis, et on a

$$k_{x_1} = \frac{2}{c}(\omega_0 - aT), \quad \text{et} \quad k_{x_2} = \frac{2}{c}(\omega_0 + aT)$$

Comme on peut le constater sur la figure 2, le remplissage du domaine de FOURIER de l'objet est très incomplet. De plus, les données se trouvent ici aussi sur des contours qui ne correspondent pas à un maillage cartésien.

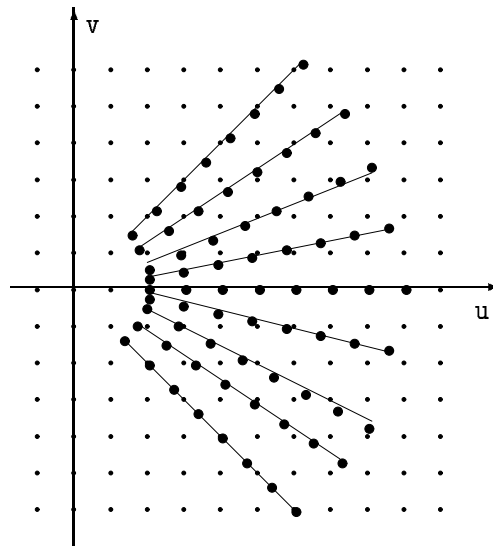


FIG. 2.20 - Remplissage du domaine de FOURIER en imagerie radar.

2.10 Imagerie en géophysique

L'équation différentielle de la propagation d'une onde dans un milieu non-homogène peut être transformée en une équation intégrale (équation de Lippmann-Schwinger) de la forme:

$$P_s(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \int_V f(\mathbf{r}') P(\mathbf{r}', \omega) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'$$

dans laquelle P_s et P sont respectivement le champ total et le champ diffracté, G_0 est la fonction de GREEN, $f(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}) - 1$ avec $n(\mathbf{r}) = \frac{c}{v(\mathbf{r})}$ et $c = \frac{\omega}{k}$. Du fait que $P(\mathbf{r}', \omega)$ est fonction des inconnues $v(\mathbf{r})$ ou $n(\mathbf{r})$, on ne peut pas résoudre cette équation directement. Mais si on se place dans le cadre de l'approximation de BORN, c'est-à-dire un objet peu diffractant, on peut remplacer $P(\mathbf{r}', \omega)$ par l'onde incidente $P_0(\mathbf{r}', \omega)$.

Considérons maintenant le problème suivant : un objet (supposé en 2-D par simplicité) est illuminé par une onde plane et on mesure le champ diffracté pour toutes les fréquences sur une ligne contournant l'objet (figure 1). Dans ce cas, si on suppose que l'onde plane reste plane en traversant l'objet, et si on néglige les diffractions multiples, on a les relations suivantes :

$$P_s(\mathbf{r}', \omega) = k^2 S(\omega) \iint_S P_0(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'$$

$$A(\mathbf{k}, \omega) = - \int_R [P_s(\mathbf{r}, \omega) \nabla G(\mathbf{r}) \nabla P_s(\mathbf{r}, \omega) G(\mathbf{r})] \mathbf{n} dl$$

où $S(\omega)$ est la TF temporelle de la source, $P_0(\mathbf{r}', \omega) = \exp[j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}']$ est l'onde plane incidente, $A(\mathbf{k}, \omega)$ est la composante onde plane du champ diffracté. Et on montre facilement que l'on a

$$A(\mathbf{k}, \omega) = -k^2 S(\omega) \iint_S f(\mathbf{r}') \exp[-j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}'] d\mathbf{r}'$$

Pour ω et \mathbf{k} fixes, $A(\mathbf{k}, \omega)$ nous donne ainsi la valeur en un point de la TF spatiale de l'objet $F(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ et en faisant varier ω et \mathbf{k} on remplit le domaine de FOURIER. Ce remplissage est cependant incomplet car la source n'a en général que des composantes en fréquences entre 0 et ω_{\max} , et k varie pour $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ (figure 2).

D'autre part, le calcul de $A(\mathbf{k}, \omega)$ nécessite la connaissance de $P_s(\mathbf{r}, \omega)$ et de son gradient $\nabla P_s(\mathbf{r}, \omega)$. Mais si on considère le cas où les récepteurs se trouvent sur une ligne droite (figure 3) on a

$$A(\mathbf{k}, \omega) = 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \int_R jk P_s(x, \omega) \exp[-jk(x_0 + x)] dx$$

et on n'a plus besoin de $\nabla P_s(\mathbf{r}, \omega)$ pour le calcul de $A(\mathbf{k}, \omega)$. Ainsi en mesurant le champ diffracté $P_s(\mathbf{r}, \omega)$ pour $x_1 \leq x \leq x_2$ on calcule $A(\mathbf{k}, \omega)$ pour $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ et k tel que $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ et on remplit ainsi le domaine de FOURIER sur des lignes droites.

Figure 1: Imagerie en géophysique.

Figure 2: Remplissage du domaine de FOURIER en géophysique.

A COMPLETER

2.11 Imagerie en radio astronomie

La synthèse d'ouverture en radio-astronomie consiste à reconstruire la distribution de brillance émise, à une certaine longueur d'onde, par un champ continu de sources célestes. Pour cela, on dispose d'un ensemble de capteurs, ou antennes (des radio-télescopes ou des télescopes optiques), permettant d'échantillonner spatialement ce champ et de recueillir des données. Ce problème est similaire à ceux rencontrés en traitement spatial (radar ou sonar).

L'ensemble des intercorrélations inter-capteurs, appelées aussi *visibilité complexes*, correspondent à des versions dégradées et bruitées de certains coefficients de FOURIER de la distribution de brillance recherchée (théorème de Van Cittert-Zernicke). Les visibilités sont souvent affectées d'une sévère distorsion de phase, liée aux conditions météorologiques et aux turbulences atmosphériques. De plus, la structure lacunaire du réseau ne permet pas d'accéder à toutes les données de FOURIER. Le problème comporte ainsi deux aspects : un problème de synthèse de FOURIER, et, simultanément, un problème de calibration de phase. Il s'agit là d'un problème inverse dont la résolution nécessite des méthodes de traitement spécifiques.

A COMPLETER

