

Chapitre 3

Cadre général et unification

Dans ce chapitre nous essayons de fournir un cadre général aux problèmes inverses et d'établir les principales notions que nous utiliserons par la suite.

3.1 Présentation du cadre général

Nous avons vu que, dans un grand nombre de problèmes réels en science expérimentale, nous sommes souvent amenés à déterminer une grandeur non observable $f(\mathbf{u})$ à partir d'un ensemble fini de *mesures* d'une grandeur observable $g(\mathbf{u})$ reliées par un *modèle* :

$$\mathcal{H}(g(\mathbf{u}), f(\mathbf{r})) = 0,$$

où \mathcal{H} est un opérateur—linéaire ou non—décrivant la relation théorique entre $g(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{u})$. En général $\mathbf{r} \in D_1 \subset \mathbb{R}^k$ et $\mathbf{u} \in D_2 \subset \mathbb{R}^{k'}$, et k n'est pas forcément égale à k' .

Parfois la description du modèle peut contenir d'autres grandeurs intermédiaires, par exemple

$$\begin{cases} g(\mathbf{u}) &= \mathcal{H}_1(f(\mathbf{r}), z(\mathbf{r})) \\ 0 &= \mathcal{H}_2(f(\mathbf{r}), z(\mathbf{r})) \end{cases},$$

où \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont deux opérateurs (souvent \mathcal{H}_1 un opérateur bilinéaire en f et en z et \mathcal{H}_2 un opérateur non linéaire), et où $z(\mathbf{r})$ est une grandeur inconnue qui intervient dans le modèle mais qui n'est pas notre centre d'intérêt.

Parfois ce modèle peut être *explicite*:

$$g(\mathbf{u}) = \mathcal{H}(f(\mathbf{r}), z(\mathbf{r})),$$

et parfois, il est même possible d'éliminer les variables intermédiaires et d'obtenir une relation explicite encore plus simple

$$g(\mathbf{u}) = \mathcal{H}(f(\mathbf{r})).$$

La description des équations qui lient ces différentes grandeurs est appelée *modélisation*. Le modèle \mathcal{H} est, en général, caractérisé par un certain nombre de paramètres $\boldsymbol{\theta}$. Connaissant $g(\mathbf{r})$ et $f(\mathbf{r})$, la détermination de $\boldsymbol{\theta}$ est ce que l'on appelle le problème de *l'identification* ou *l'estimation des paramètres* du modèle.

Connaissant le modèle \mathcal{H} et l'objet $f(\mathbf{r})$, le calcul de $g(\mathbf{u})$ est ce que l'on appelle le *problème direct*. Inversement, le calcul de $f(\mathbf{r})$ connaissant \mathcal{H} et $g(\mathbf{u})$ est ce que l'on appelle le *problème inverse*.

Autant, la résolution des problèmes directs, en général, ne pose pas de difficulté particulière, la résolution des autres problèmes est souvent plus délicate, car ceux-ci sont souvent des *problèmes mal posés*. En effet, la résolution de ces problèmes présente, entre autre, la caractéristique structurelle désagréable d'être très sensible aux erreurs sur les données. Or aucun dispositif expérimental n'est complètement affranchi d'une incertitude, dont l'origine la plus simple est la précision finie des mesures. De même, aucun modèle mathématique ne peut exactement refléter la réalité. Il est donc plus réaliste de considérer que l'objet recherché et les mesures sont reliés par une équation de la forme

$$\mathcal{H}(g(\mathbf{u}), f(\mathbf{r}), b(\mathbf{u})) = 0,$$

où $b(\mathbf{u})$ représente les erreurs, appelé communément *bruit*.

Lorsqu'on a un modèle explicite et simple, et qu'on peut faire l'hypothèse que les erreurs n'interviennent qu'à la sortie, on obtient :

$$g(\mathbf{u}) = \mathcal{H}(f(\mathbf{r})) \diamond b(\mathbf{u}).$$

Si de plus on peut supposer que les erreurs sont additives on a :

$$g(\mathbf{u}) = \mathcal{H}(f(\mathbf{r})) + b(\mathbf{u}),$$

Lorsque \mathcal{H} est un opérateur linéaire cette relation sous sa forme générale s'écrit

$$g(\mathbf{u}) = \int f(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} + b(\mathbf{u}),$$

où $h(\mathbf{r}, \mathbf{u})$, le noyau de cette équation intégrale de première espèce, est appelé la fonction d'appareil. Alors, dans différents domaines d'applications on peut se trouver devant les situations suivantes :

- Lorsque les variables \mathbf{r} et \mathbf{u} sont homogènes et

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{r} - \mathbf{u}),$$

i.e. lorsque le modèle est *invariant par translation* on a une équation de *convolution*:

$$g(\mathbf{u}) = \int f(\mathbf{r}) h(\mathbf{r} - \mathbf{u}) d\mathbf{r} + b(\mathbf{u}).$$

La fonction $h(\mathbf{r})$ est alors appelée la *réponse impulsionnelle* et le problème inverse correspondant *déconvolution* ou encore *restauration d'image*.

- $h(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ peut être séparable :

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \prod_k h_k(r_k, u_k)$$

C'est, par exemple, le cas de la *synthèse de FOURIER*

$$g(\mathbf{u}) = \int f(\mathbf{r}) \exp[-j \langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle] d\mathbf{r},$$

où

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \exp[-j \langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle] = \exp\left[-j \sum_k r_k u_k\right].$$

- $h(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ peut être à la fois séparable et invariant par translation :

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \prod_k h_k(r_k - u_k)$$

C'est, par exemple, le cas de la restauration d'image lorsque la réponse impulsionnelle est séparable.

- $h(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ peut être de la forme :

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \delta(c(\mathbf{r}, \mathbf{u}))$$

où $\delta(\cdot)$ est la fonction DIRAC et $c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = 0$ décrit un sous-espace dans le domaine de la fonction $f(\mathbf{r})$. C'est par exemple le cas de la *reconstruction d'image* en tomographie X où on a $\mathbf{u} = (r, \phi)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ et

$$g(r, \phi) = \iint f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$

et où $r - x \cos \phi - y \sin \phi = 0$ décrit une ligne droite dans l'espace (x, y) du domaine de la fonction $f(x, y)$.

– $h(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ peut être de la forme :

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \exp [-j \langle \mathbf{r}, \mathbf{c}(\mathbf{u}) \rangle]$$

où $\langle ., . \rangle$ représente un produit scalaire et $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ un ensemble de fonctions telles que les équations $\mathbf{u} = \mathbf{c}(\mathbf{u})$ décrivent un sous-espace dans le domaine de FOURIER de la fonction $f(\mathbf{r})$. À titre d'exemple, prenons le cas où $\mathbf{u} = (\Omega, \phi)$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $c_1(\mathbf{u}) = c_1(\Omega, \phi) = \Omega \cos \phi$, $c_2(\mathbf{u}) = c_2(\Omega, \phi) = \Omega \sin \phi$ et

$$g(\Omega, \phi) = \iint f(x, y) \exp [-j [\Omega \cos \phi x + \Omega \sin \phi y]] dx dy$$

et $u = \Omega \cos \phi$ et $v = \Omega \sin \phi$ décrivent une ligne droite dans l'espace (u, v) faisant un angle ϕ avec l'axe des u .

3.2 Exemples classiques de problèmes inverses linéaires

Parmi les problèmes inverses linéaires que l'on rencontre souvent en traitement du signal et de l'image, nous allons en citer un certain nombre qui sont les plus classiques.

3.2.1 Déconvolution de signaux 1-D

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) * h(t) + b(t) \\ &= \int h(\tau) f(t - \tau) d\tau + b(t) \\ &= \int f(\tau) h(t - \tau) d\tau + b(t) \end{aligned}$$

où $g(t)$ est le signal mesuré, $f(t)$ est le signal recherché, et $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système de mesure. Ici l'opérateur \mathcal{H} est un opérateur de convolution.

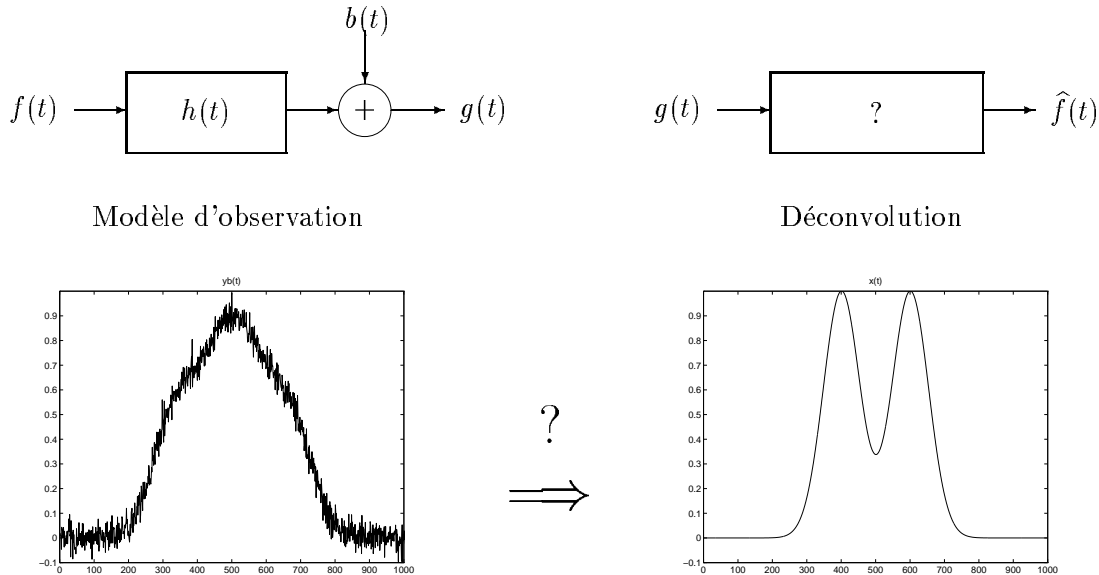


FIG. 3.1 - *Déconvolution de signaux.*

Sous forme discrète cette relation s'écrit :

$$g(m) = \sum_{k=-q}^p h(k) f(m - k) + b(m), \quad m = 0, \dots, M$$

ou encore

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} + \mathbf{b}$$

où $\mathbf{g} = [g_0, \dots, g_M]$, $\mathbf{f} = [f_{-p}, \dots, f_{M+q}]$ et où \mathbf{H} est une matrice de TOEPLITZ dont les éléments sont déterminés par les échantillons de sa réponse impulsionnelle $\mathbf{h} = [h_{-q}, \dots, 0, \dots, h_p]$.

Le caractère TOEPLITZ de la matrice \mathbf{H} est due à la propriété d'invariance par translation de l'opérateur.

3.2.2 Débruitage ou filtrage

$$g(t) = f(t) + b(t),$$

où $g(t)$ est le signal mesuré, $f(t)$ est le signal recherché, et $b(t)$ est le bruit. Lorsque $g(t)$ est observée aux instants réguliers $t_i = (i-1)\Delta T$, $i = 1, \dots, n$ on peut considérer ce problème comme un cas particulier de déconvolution où la réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t)$.

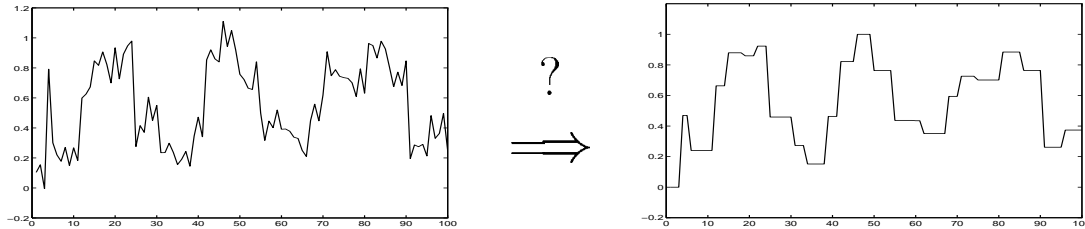


FIG. 3.2 - Débruitage de signaux.

Lorsque $g(t)$ est observée aux instants irréguliers t_i il s'agit de problèmes d'interpolation et d'extrapolation des signaux.

De même on peut considérer le débruitage ou le filtrage des images ::

$$g(x, y) = f(x, y) + b(x, y).$$

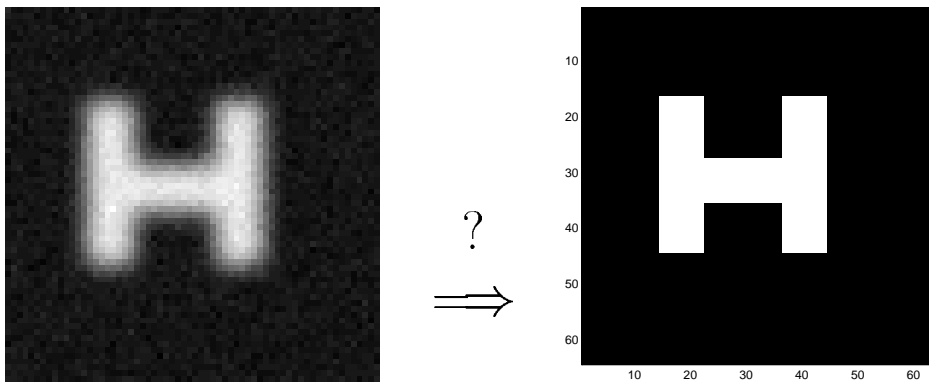
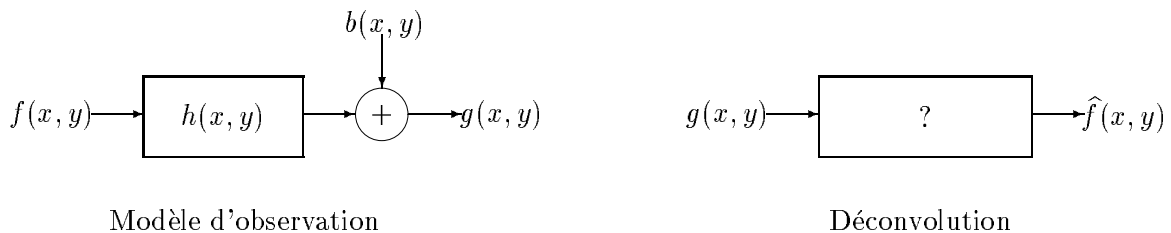


FIG. 3.3 - Débruitage d'images.

3.2.3 Restauration d'image

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= f(x, y) * h(x, y) + b(x, y) \\
 &= \iint_D f(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy' + b(x, y) \\
 &= \iint_D h(x', y') f(x - x', y - y') dx' dy' + b(x, y),
 \end{aligned}$$

où $g(x, y)$ est l'image observée, $f(x, y)$ est l'image recherchée, et $h(x, y)$ est la réponse impulsionnelle du système d'imagerie. Ici $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{r} = (x', y')$, $h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{r} - \mathbf{u})$ et l'opérateur \mathcal{H} est un opérateur de convolution bivariable.



?

⇒



FIG. 3.4 - Restauration d'image.

Sous forme discrète cette relation s'écrit :

$$g(m, n) = \sum_{k=-p}^{p'} \sum_{l=-q}^{q'} h(k, l) f(m - k, n - l) + b(m, n)$$

ou encore

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} + \mathbf{b}$$

où \mathbf{g} et \mathbf{f} sont deux vecteurs contenant les lignes (ou les colonnes, dans un ordre lexicographique) de l'image dégradée et de l'image initiale et \mathbf{H} est une matrice qui a une structure de TOEPLITZ-BLOC-TOEPLITZ dont les éléments sont déterminés par les échantillons de la réponse impulsionnelle $h(k, l)$.

Le caractère TOEPLITZ-BLOC-TOEPLITZ de la matrice \mathbf{H} est propre à la propriété de l'opérateur de convolution.

3.2.4 Reconstruction d'image en tomographie X

$$g(r, \phi) = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy + b(r, \phi),$$

où $g(r, \phi)$ représente la projection suivant l'angle ϕ , et $f(x, y)$ est l'objet à reconstruire. Ici $\mathbf{u} = (r, \phi)$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi)$ et l'opérateur \mathcal{H} est l'opérateur de la transformée de RADON (TR).

Notons que, théoriquement, cette transformée admet une inversion qui est

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\frac{\partial p(r, \phi)}{\partial r}}{(r - x \cos \phi - y \sin \phi)} dr d\phi$$

mais, contrairement à ce qu'on peut imaginer, l'existence d'une expression analytique pour l'inversion de cette transformée ne réduit en rien les difficultés de son inversion dans des situations réelles. Nous reviendrons sur cette remarque dans les chapitres suivants.

La discrétisation de cette équation est plus délicate que celle de la restauration d'image. On peut cependant, imaginer facilement que cette relation sous forme discrète, puisse aussi s'écrire de la forme

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} + \mathbf{b}$$

où \mathbf{g} est un vecteur concaténant l'ensemble des projections $p(r_i, \phi_j)$ et \mathbf{f} est un vecteur contenant les pixels de l'image. La matrice \mathbf{H} dont les éléments sont entièrement déterminés par la géométrie de l'instrumentation (la discrétisation de l'objet et les positions de capteurs). Cette matrice n'a pas, en général, de structure particulière, cependant elle est sûrement très creuse. En effet, si on partage l'espace de (x, y) en pixels et si on fait l'hypothèse que $f(x, y)$ est constante à l'intérieur de chaque pixel, alors l'éléments H_{ij} correspond à la longueur du segment du rayons i traversant le pixel j .

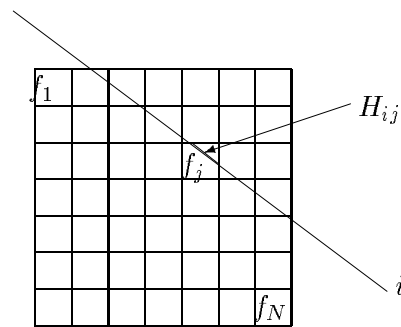


FIG. 3.5 - Discrétisation de la transformée de RADON.

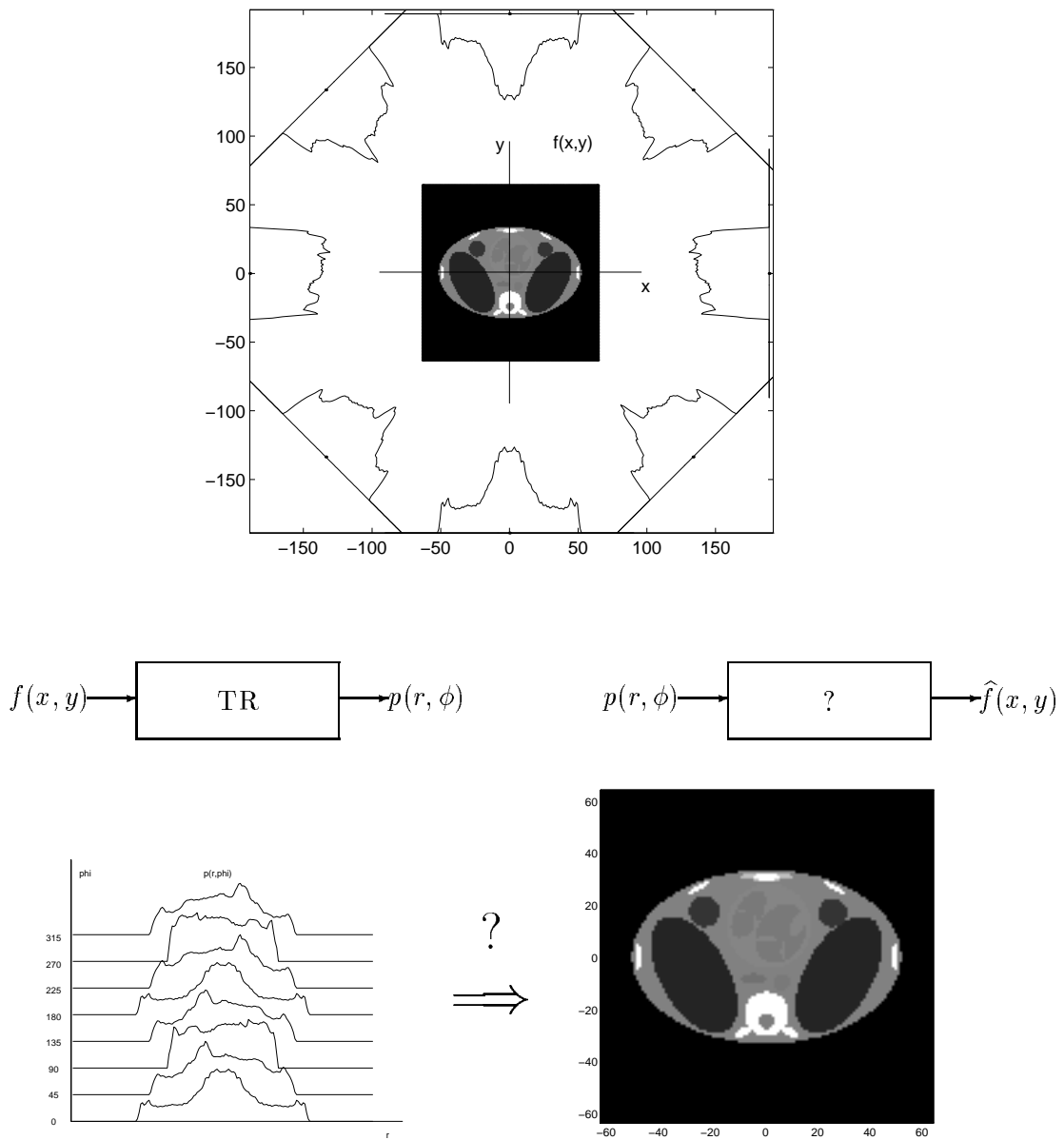


FIG. 3.6 - Reconstruction d'image en tomographie X.

3.2.5 Radiographie des objets cylindriques

Dans le problème de reconstruction d'image en tomographie X, lorsque l'objet $f(x, y)$ a une symétrie de révolution, la fonction ne dépend pas de l'angle ϕ et peut être exprimée seulement en fonction de ρ en coordonnées cylindriques : $f(x, y) = f(\rho)$. De même, ses projections $g(r, \phi)$ suivant les différents angles ϕ sont identiques et ne dépendent pas de ϕ . On peut alors établir une relation entre $f(\rho)$ et $g(r)$ qui est :

$$g(r) = \int_r^R f(\rho) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} d\rho + b(r),$$

où $g(r)$ est l'intensité des rayons traversés (mesures), $f(\rho)$ est la fonction densité de la matière qui ne dépend que de la coordonnée radiale ρ et R est le rayon extérieur de l'objet. Remarquons que cette équation intégrale correspond à une transformée d'ABEL.

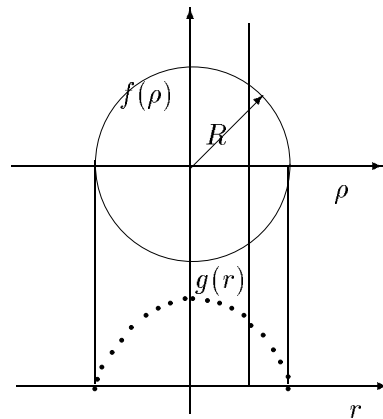


FIG. 3.7 - Radiographie des objets cylindriques.

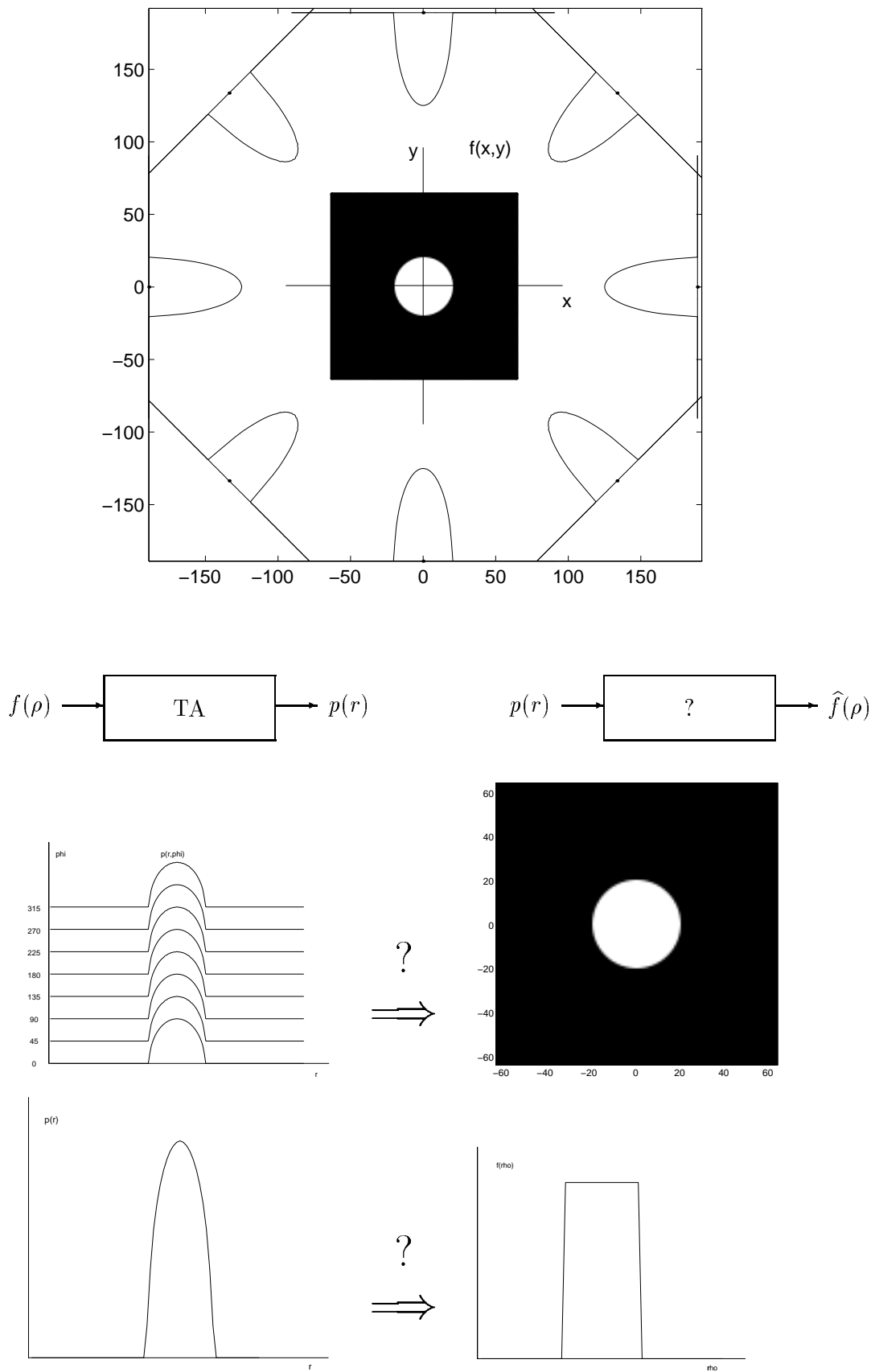


FIG. 3.8 - Reconstruction d'image en tomographie X pour des objets cylindriques.

3.2.6 Synthèse d'ouverture en radio astronomie ou imagerie radar

$$g(u, v) = \iint_D f(x, y) \exp[-j(ux + vy)] dx dy + b(u, v),$$

où $f(x, y)$ est l'image à reconstruire, et $g(u, v)$ représente, soit une mesure de la corrélation entre les signaux recueillis par deux antennes en synthèse d'ouverture en radio astronomie, soit la transformée de FOURIER (TF) du signal d'écho en imagerie radar. Dans le cas de la radio astronomie, $f(x, y)$ représente la brillance du ciel tandis que dans le cas de l'imagerie radar elle représente la variation de l'indice de réfraction de l'objet (la cible) par rapport à son environnement.

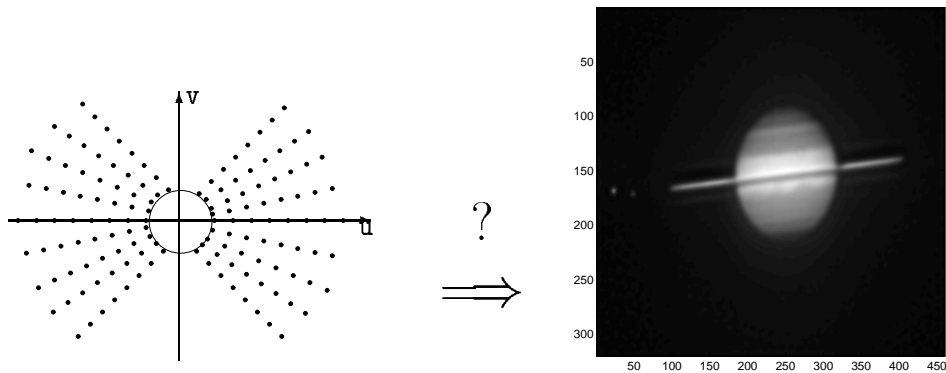


FIG. 3.9 - *Synthèse d'ouverture en radioastronomie.*

Ici $\mathbf{u} = (u, v)$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $h(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \exp[-j \langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle]$ et l'opérateur \mathcal{H} est l'opérateur de la transformée de FOURIER bivariable.

Notons qu'ici aussi, théoriquement, la TF inverse existe et on a :

$$f(x, y) = \iint g(u, v) \exp[+j(ux + vy)] du dv,$$

mais, là encore, l'existence de cette formule ne réduit en rien la difficulté du problème inverse de la synthèse de FOURIER. En effet, si $g(u, v)$ était connue précisément et pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, alors $f(x, y)$ pourrait être calculée à partir de cette intégrale. Mais, en pratique, $g(u, v)$ peut être mesurée sur un nombre fini de points (u_i, v_i) non nécessairement distribués d'une manière uniforme dans l'espace (u, v) , et c'est exactement là la difficulté de l'inversion.

3.2.7 Synthèse de FOURIER en reconstruction tomographique d'image

$$g(\Omega, \phi) = \iint_D f(x, y) \exp[-j(T_1(\Omega, \phi)x + T_2(\Omega, \phi)y)] dx dy + b(\Omega, \phi)$$

où

$$\begin{cases} u = T_1(\Omega, \phi) \\ v = T_2(\Omega, \phi) \end{cases}$$

définissent un ensemble de contours algébriques dans l'espace de FOURIER (u, v) .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la synthèse de FOURIER se trouve au cœur d'un grand nombre d'applications en imagerie. Parmi celles-ci, on trouve :

- Tomographie à rayons X :

$$\begin{pmatrix} u = T_1(\Omega, \phi) \\ v = T_2(\Omega, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix},$$

où les contours algébriques sont des lignes droites concentriques, et où $g(\Omega, \phi_i)$ représente la TF spatiale de $p(r, \phi_i)$ par rapport à la variable r .

- Imagerie par résonance magnétique nucléaire (RMN) :

Cette formulation du problème se trouve aussi dans le cas de l'imagerie RMN. Dans ce cas $g(\Omega, \phi_i) = s(t, \phi_i)$, où $s(t, \phi_i)$ est directement le signal de précession libre mesuré quand le gradient du champ magnétique est dans la direction ϕ_i .

- Tomographie à ondes diffractées :

$$\begin{pmatrix} u = T_1(\Omega, \phi) \\ v = T_2(\Omega, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_0 + \sqrt{k_0^2 - \Omega^2} \\ \Omega \end{pmatrix},$$

où k_0 est la constante de propagation des ondes, et où les $g(\Omega, \phi_i)$ représentent les TF spatiales des champ diffractés mesurés. Ici, les contours algébriques sont des demi-cercles concentriques.

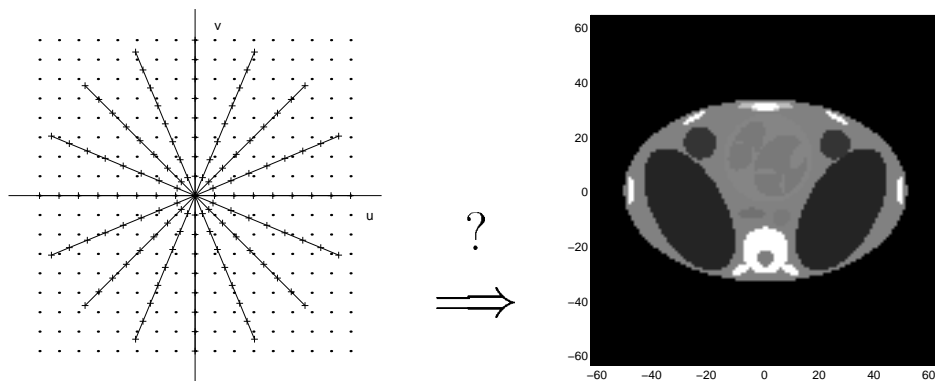


FIG. 3.10 - Synthèse de FOURIER en tomographie X.

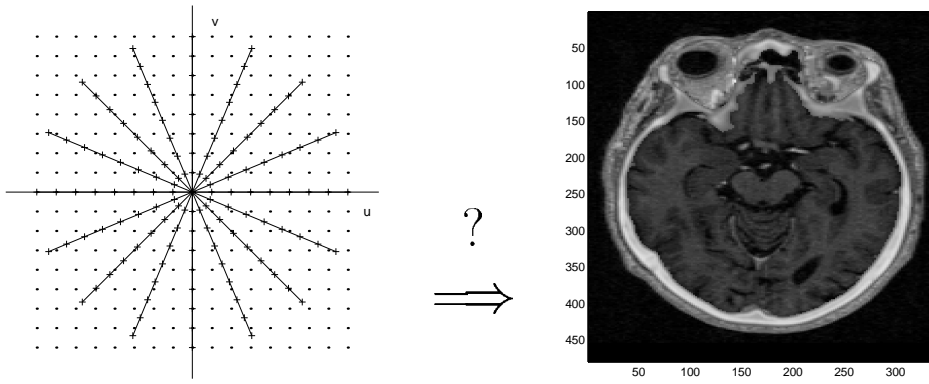


FIG. 3.11 - *Synthèse de FOURIER en imagerie RMN.*

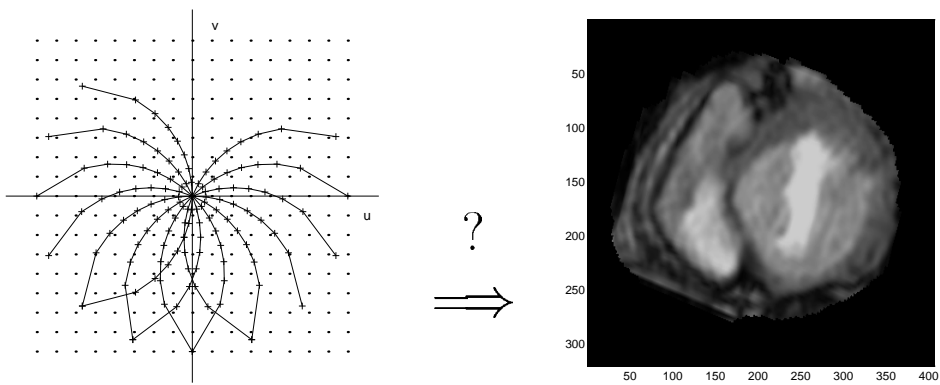


FIG. 3.12 - *Synthèse de FOURIER en tomographie par ondes diffractées.*

3.2.8 Synthèse de FOURIER-LAPLACE

$$g(u, s) = \iint_D f(x, y) \exp[-j(ux + sy)] dx dy + b(u, s),$$

où u est une variable réelle, tandis que $s = \gamma + jv$ est une variable complexe.

Cette équation intervient en tomographie de diffraction dans des objets dissipatifs ou bien en imagerie tomographique par courants de FOUCAULT en contrôle non destructif.

(u, v) représente un point dans le domaine de FOURIER spatial de l'objet $f(x, y)$. Ceci correspond au phénomène de propagation dans les deux directions, tandis que γ représente un phénomène de diffusion ou d'atténuation.

3.3 Exemples de problèmes inverses non linéaires

Parmi les problèmes inverses non linéaires classiques nous allons citer deux exemples.

3.3.1 Imagerie par ondes diffractées

Lorsqu'un objet $f(\mathbf{r})$ est illuminé par une onde incidente $\phi_0(\mathbf{r})$ le champ total $\phi(\mathbf{r})$ peut être modélisé par la somme du champ incident et un champ diffracté qui dépend à la fois de l'objet et du champ incident :

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \int_D G_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

et le champ diffracté à l'extérieur de l'objet $g(\mathbf{u})$ que l'on mesure est une fonction de l'objet et du champ total à l'intérieur de l'objet :

$$g(\mathbf{u}) = \int_D G_m(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \phi(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + b(\mathbf{u}).$$

Le problème de l'imagerie dans ce contexte est de fournir une estimation de $f(\mathbf{r})$ à partir d'un nombre fini de mesures $g(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, \dots, M$.

Le cas de l'approximation de BORN étant la situation de faibles perturbations où on peut remplacer $\phi(\mathbf{r})$ par $\phi_0(\mathbf{r})$ dans cette dernière équation. Nous avons déjà présentés et détaillés ces équations dans le cas linéaire. Ici, l'objectif est de considérer le problème non linéaire.

Travailler dans le cadre fonctionnel ne permet pas de voir facilement les difficultés du problème. C'est pourquoi, nous allons discrétiser ces équations, en utilisant par exemple la méthode des moments. Il n'est alors pas difficile de voir que la forme discrétisée de ces deux équations devient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{G}_o \mathbf{F} \boldsymbol{\phi}, \\ \mathbf{g} &= \mathbf{G}_m \mathbf{F} \boldsymbol{\phi} + \mathbf{b}, \end{aligned}$$

où

- $\boldsymbol{\phi}_0$ et $\boldsymbol{\phi}$ sont deux vecteurs représentant respectivement le champ incident et le champ total,
- \mathbf{G}_m et \mathbf{G}_o sont deux matrices reliées aux fonctions de GREEN,
- \mathbf{F} est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont formés par les éléments du vecteur \mathbf{f} qui représente l'objet (les pixels de l'image à reconstruire concatenés ligne par ligne ou colonne par colonne) et,
- \mathbf{g} est un vecteur contenant les mesures et \mathbf{b} un vecteur représentant les erreurs de mesures.

Écrite sous cette forme, pour mieux illustrer le caractère non linéaire du problème, il est maintenant possible d'expliciter la relation liant les mesures \mathbf{g} aux inconnus \mathbf{f} , en éliminant les variables intermédiaires $\boldsymbol{\phi}$. En effet, calculant $\boldsymbol{\phi}$ à l'aide de la première équation et la remplaçant dans la deuxième on obtient :

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}_m \mathbf{F} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_o \mathbf{F})^{-1} \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{H}(\mathbf{f}) + \mathbf{b},$$

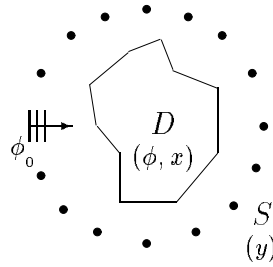


FIG. 3.13 - Géométrie de l'imagerie par ondes diffractées.

ce qui permet de montrer d'une manière plus explicite le caractère non linéaire de l'opérateur \mathbf{H} liant l'objet aux mesures.

Evidemment, il n'existe pas de relation explicite pour l'inversion de ces équations et l'obtention d'une solution ne peut se faire que d'une manière itérative, ceci quelque soit le cadre choisi qu'il soit en dimension infinie ou finie.

Dans ce problème non linéaire aussi, la résolution du problème directe, c'est à dire étant donnée $f(\mathbf{r})$ calculer $g(\mathbf{r})$, ne pose pas de grandes difficultés. En effet, on peut montrer qu'avec un choix judicieux pour les fonctions de bases et la discrétisation de ces équations, on peut calculer $g(\mathbf{r})$ aussi précisément que l'on souhaite si on connaît l'objet $f(\mathbf{r})$. Par contre, la résolution du problème inverse, c'est à dire le calcul de $f(\mathbf{r})$ à partir de $g(\mathbf{r})$ est plus délicat. En effet, même lorsqu'on suppose pouvoir mesurer $g(\mathbf{r})$ partout autour de l'objet avec une précision infinie, l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas garanties pour n'importe quel objet $f(\mathbf{r})$. De plus, même lorsqu'on impose à l'objet $f(\mathbf{r})$ dans un ensemble de fonctions telles que ces deux propriétés soient garanties, la solution du problème reste très sensible aux erreurs de mesures.

A COMPLETER

3.3.2 Tomographie d'impédance

$$p(\mathbf{u}_i) = \int_V \sigma(\mathbf{r}) |\nabla \phi_i(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} + b_i$$

où $p(\mathbf{u}_i)$ est la puissance dissipée mesurée entre le point de coordonnée (\mathbf{u}_i) et un point de référence, $\sigma(\mathbf{r})$ est la distribution des conductivité électriques dans l'objet, $\phi_i(\mathbf{r})$ est la distribution du potentiel électrique dans l'objet. Notons que $\phi_i(\mathbf{r})$ dépend du $\sigma(\mathbf{r})$, ce qui rend cette équation non linéaire.

A COMPLETER