

Chapitre 4

Problèmes mal-posés

Pour mieux comprendre les difficultés de la résolution des problèmes inverses, un cadre classique est l'étude des problèmes inverses linéaires dans des espaces de Hilbert où l'on définit deux ensembles F et G et un opérateur $H : F \mapsto G$ tel que :

$$Hf = g \quad f \in F \quad g \in G \quad \text{espaces de Hilbert}$$

Souvent l'opérateur H est borné et compact et nous verrons que c'est exactement ces caractères qui sont à l'origine des principales difficultés de la résolution des problèmes inverses.

Ce cadre topologique et abstrait nous permettra de définir les notions de problèmes bien posés et mal posés. C'est pourquoi, avant de donner ces définitions un rappel sur la terminologie de l'analyse fonctionnelle est nécessaire. Après ce rappel les notions de problèmes *bien posés* et *mal posés* seront définies et un certain nombre d'exemples détailleront ces notions.

Finalement, une analyse plus détaillée du problème de la déconvolution nous permettra de comprendre d'une manière plus concrète le caractère mal posé du problème et les difficultés de sa résolution.

4.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Considérons deux ensembles F et G et un opérateur $H : F \mapsto G$.

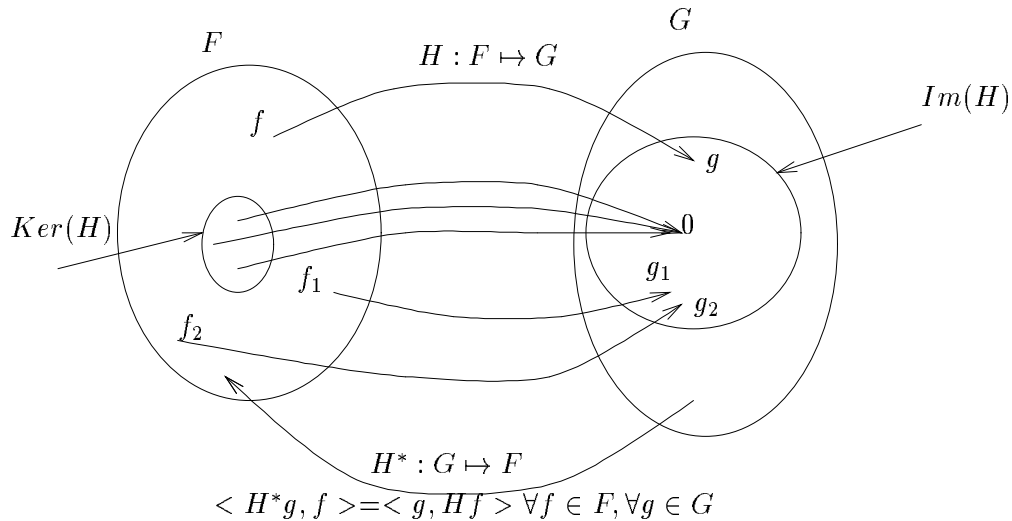


FIG. 4.1 - Analyse fonctionnelle et topologie

- Topologie sur un ensemble F :
Un système de sous-ensembles de F , dits **ouverts**, tels que la réunion d'ensembles ouverts est un ouvert, et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ouvert.
- $F_1 \subset F$ est dit **fermé** si son complémentaire est un ouvert.
- Pour un ouvert M , on définit :
 - sa fermeture : \overline{M} intersection de tous les fermés qui contiennent M
 - sa frontière : $\overline{M} - M$
- $\mathcal{I}m(\mathbf{H}) = \bigcup \{\mathbf{H}f\} \subset G$ est l'image de \mathbf{H}
- $\mathcal{K}er(\mathbf{H}) = \{f, \mathbf{H}f = \mathbf{0}\} \subset F$ est le noyau de \mathbf{H}
- $\mathbf{H}^* : G \mapsto F$ est l'opérateur adjoint de \mathbf{H}

$$\langle \mathbf{H}^*g, f \rangle = \langle g, \mathbf{H}f \rangle \quad \forall f \in F, \forall g \in G$$

- $\mathcal{K}er(\mathbf{H}) = \mathcal{I}m(\mathbf{H}^*)^\perp$
- $\mathcal{K}er(\mathbf{H}^*) = \mathcal{I}m(\mathbf{H})^\perp$
- $\mathcal{K}er(\mathbf{H})^\perp = \overline{\mathcal{I}m(\mathbf{H}^*)}$
- $\mathcal{K}er(\mathbf{H}^*)^\perp = \overline{\mathcal{I}m(\mathbf{H})}$

- \mathbf{H} est **borné** s'il existe un réel $c \geq 0$ tel que $\|\mathbf{H}\mathbf{f}\| \leq c\|\mathbf{f}\|$, $\forall \mathbf{f} \in F$
- Un ensemble $B \subset \mathbf{R}^n$ est dit **borné** s'il est entièrement situé dans une boule ouverte dont le centre est à l'origine et le rayon est fini.
- Un ensemble fermé et borné est dit **compact**.
- Un opérateur \mathbf{H} est dit **compact** s'il applique tout ensemble borné $B \subset F$ dans un ensemble $A(B)$ dont la fermeture $\overline{A(B)}$ est compacte.

Exemple 1:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

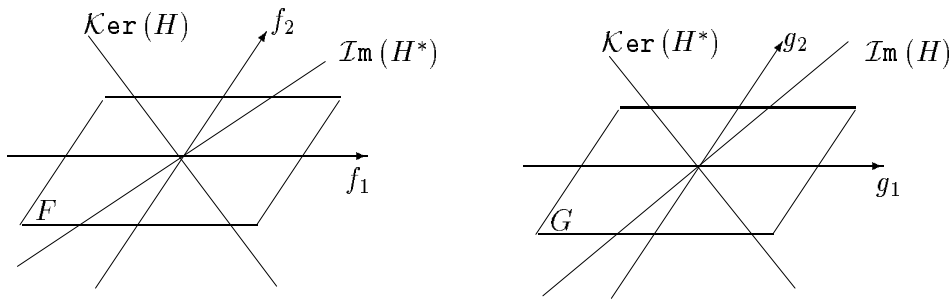


FIG. 4.2 - Image et noyau d'un opérateur et de son adjoint: $F = G = \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\mathbf{H}) &= \{(f_1, f_2) : f_1 = -2f_2\} \\ \text{Im}(\mathbf{H}^*) &= \left\{ (f_1, f_2) : f_1 = \frac{1}{2}f_2 \right\} \\ \text{Ker}(\mathbf{H}^*) &= \{(g_1, g_2) : g_1 = -3g_2\} \\ \text{Im}(\mathbf{H}) &= \left\{ (g_1, g_2) : g_1 = \frac{1}{3}g_2 \right\} \end{aligned}$$

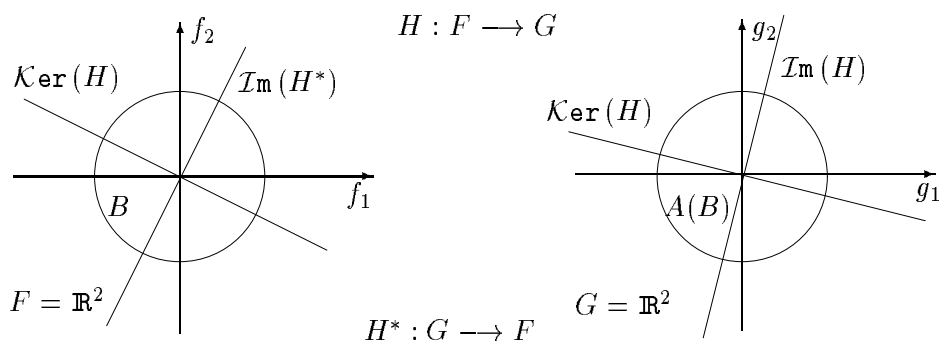
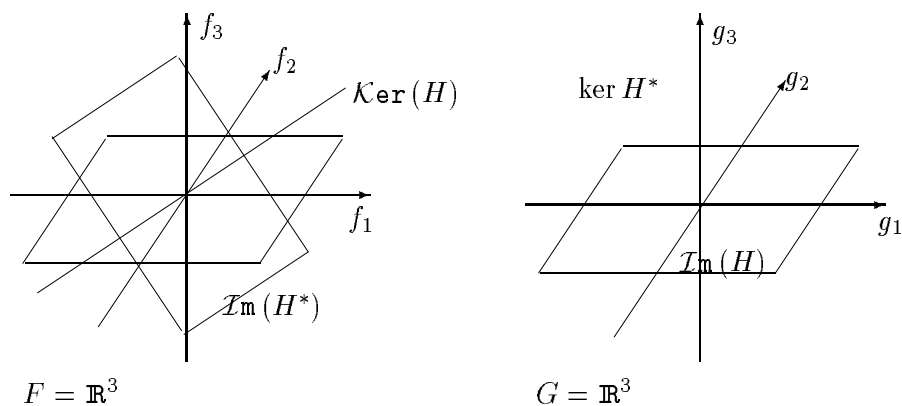


FIG. 4.3 - Ensemble et opérateur compacts

Exemple 2:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^* \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.4 - Image et noyau d'un opérateur et de son adjoint: $F = G = \mathbb{R}^3$

$$\text{Ker}(\mathbf{H}) = \{(f_1, f_2, f_3) : f_1 = f_2, f_3 = 2f_2\}$$

$$\text{Im}(\mathbf{H}^*) = \{(f_1, f_2, f_3) : f_1 + f_2 - 2f_3 = 0\}$$

$$\text{Ker}(\mathbf{H}^*) = \{(g_1, g_2, g_3) : g_1 = g_2 = 0\}$$

$$\text{Im}(\mathbf{H}) = \{(g_1, g_2, g_3) : g_3 = 0\}$$

Exemple 3:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^* \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

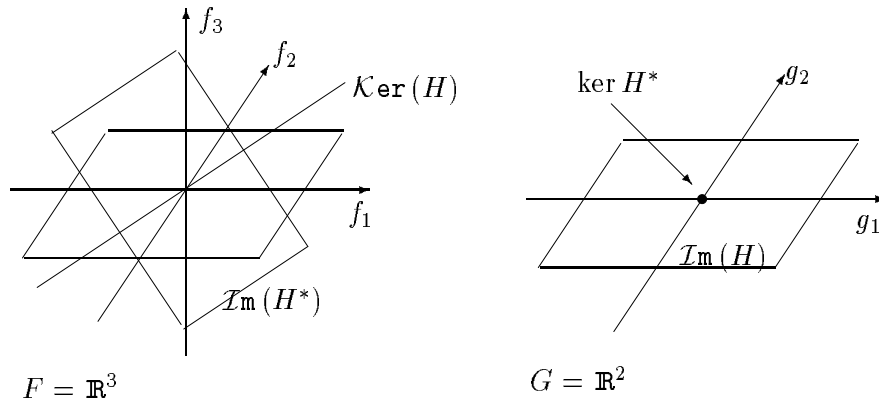


FIG. 4.5 - Image et noyau d'un opérateur et de son adjoint : $F = \mathbb{R}^3, G = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\mathbf{H}) &= \{(f_1, f_2, f_3) : f_1 = f_2, f_3 = 2f_2\} \\ \text{Im}(\mathbf{H}^*) &= \{(f_1, f_2, f_3) : f_1 + f_2 - 2f_3 = 0\} \\ \text{Ker}(\mathbf{H}^*) &= \{(g_1, g_2) : g_1 = g_2 = 0\} \\ \text{Im}(\mathbf{H}) &= \{(g_1, g_2) : g_1 = g_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

4.2 Définitions

D'après HADAMARD, un problème est dit *bien posé* si le problème admet une solution (Existence), si elle unique (Unicité) et si elle est stable (Stabilité). Le problème est dit *mal posé* si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée.

• **Existence** $\mathbf{g} \in G = \mathcal{I}m(\mathbf{H}) \quad \forall \mathbf{g} \in G \exists \mathbf{f} : \mathbf{H} \mathbf{f} = \mathbf{g}$

• **Unicité** $\mathcal{K}er(\mathbf{H}) = \{0\} \quad \mathbf{H} \mathbf{f} = 0 \longrightarrow \mathbf{f} = 0$

• **Stabilité** $\mathcal{I}m(\mathbf{H}) = \overline{\mathcal{I}m(\mathbf{H})} = \mathcal{K}er(\mathbf{H}^*)^\perp$
faible perturbation de \mathbf{g} donne
faible perturbation de la solution \mathbf{f}

$$F = \mathcal{K}er(\mathbf{H}) + \mathcal{K}er(\mathbf{H})^\perp, \quad G = \mathcal{K}er(\mathbf{H}^*) + \mathcal{K}er(\mathbf{H}^*)^\perp$$

Quatre situations mutuellement exclusives :

1. $\mathcal{I}m(\mathbf{H})$ est dense dans G : $(\mathcal{K}er(\mathbf{H}) = \{0\} \text{ et } \mathbf{g} \in \mathcal{I}m(\mathbf{H}))$
Il existe une solution au sens classique.
2. $\mathcal{I}m(\mathbf{H})$ n'est pas dense dans G : $(\mathcal{K}er(\mathbf{H}) = \{0\} \text{ et } \mathbf{g} \notin \mathcal{I}m(\mathbf{H}))$
Il n'existe pas de solution au sens classique.
3. $\overline{\mathcal{I}m(\mathbf{H})} \subset G$ et $\mathbf{g} \in \mathcal{I}m(\mathbf{H}) + \mathcal{I}m(\mathbf{H})^\perp$
On peut définir une solution au sens de l'inversion généralisée.
4. $\overline{\mathcal{I}m(\mathbf{H})} \subset G$ et $\mathbf{g} \notin \mathcal{I}m(\mathbf{H}) + \mathcal{I}m(\mathbf{H})^\perp$
Il n'existe pas de solution au sens classique.

\mathbf{H} : opérateur linéaire borné et compact $\longrightarrow \mathcal{I}m(\mathbf{H})$ ouvert

La symétrisation de \mathbf{H} n'apporte rien.

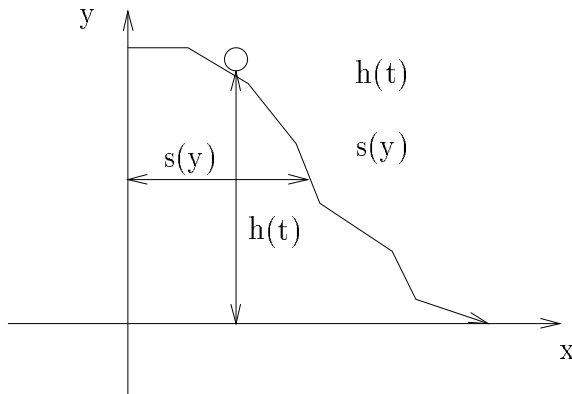
$$\mathcal{I}m(\mathbf{H}^* \mathbf{H}) = \mathcal{I}m(\mathbf{H}^*), \text{ si } \mathcal{K}er(\mathbf{H}) = \{0\} \rightarrow \mathcal{K}er(\mathbf{H} \mathbf{H}^*) = \mathcal{K}er(\mathbf{H}^*)$$

$$\mathbf{H}^* \mathbf{g} = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \mathbf{f}$$

est aussi mal-posé. Les problèmes directs sont généralement bien posés. Les problèmes inverses sont souvent mal posés.

4.3 Exemples de problèmes mal-posés

Exemple 1: Problème d'ABEL



- $s(y)$ profil de trajectoire d'un point pesant, partant de l'altitude h .
- $t(h)$ temps d'arrivée à l'altitude zéro

$$t(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{h-y}} dy$$

inversement

$$s(y) = -\frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^y \frac{t(h)}{\sqrt{y-h}} dh$$

- s_i = résultat d'une mesure de $s(y_i)$,
- $d_s = \sup |s_i - s(y_i)|$ mesure "naturelle",
- t_e = valeur de t permettant de coller exactement sur une donnée expérimentale,
- $d_t = \sup |t_e - t|$ mesure "naturelle",
- L'application $s \mapsto t$ n'est pas continue pour ces distances!

Exemple 2: Diffraction inverse ou Synthèse d'ouverture

- $f(r)$ forme d'un objet,
- $g(u)$ champ diffracté,

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \exp[-jur] \, dr$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp[jur] \, du$$

$$g_1(u) = g_0(u) + \epsilon \exp[-\alpha u^2]$$

$$f_1(r) = f_0(r) + \frac{\epsilon}{(4\pi\alpha)^{1/2}} \exp[-r^2/4\alpha]$$

- norme sup:

$$\max_u |g_1(u) - g_0(u)| \leq \alpha\epsilon$$

$$\max_r |f_1(r) - f_0(r)| \leq \alpha \frac{\epsilon}{(4\pi\alpha)^{1/2}}$$

- norme L^2 :

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(u) - g_0(u)]^2 \, du \right\}^{1/2} = \epsilon(\pi/2\alpha)^{1/4}$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(r) - f_0(r)]^2 \, dr \right\}^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \epsilon(\pi/2\alpha)^{1/4}$$

- Un problème mal-posé peut être rendu bien-posé juste en changeant l'espace des solutions.

Exemple 3: Opérateurs linéaires et compacts

$$g(s) = \int_a^b h(s,t)f(t)dt \quad f \in F, \quad g \in G, \quad F = G = L^2[a, b],$$

et

$$\int_a^b \int_a^b |h(s,t)|^2 ds dt < \infty$$

\mathbf{H} est compact et admet une décomposition spectrale

$$h(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(s) \psi_k(t)$$

$$\int_a^b h(s,t) \psi_k(t) dt = \lambda_k \phi_k(s), \quad \int_a^b h(s,t) \phi_k(s) ds = \lambda_k \psi_k(t)$$

$\{\psi_k\}$ et $\{\phi_k\}$, fonctions orthonormales singulières de \mathbf{H} , ou bien fonctions propres de $\mathbf{H}^*\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$, forment une base de $L^2[a, b]$.

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(s)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k(t) \quad \text{avec} \quad b_k = \frac{\langle g, \phi_k \rangle}{\lambda_k}$$

Pour que cette solution appartienne à $L^2[a, b]$, il faut imposer

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} a_k^2 \longrightarrow 0$$

G doit être réduit par rapport à $L^2[a, b]$

sinon, F peut contenir des solutions qui peuvent être inacceptables.

4.4 Déconvolution : un problème mal-posé

Pour montrer que la déconvolution est un problème mal-posé nous pouvons utiliser les outils suivants :

- La transformée de FOURIER qui permet de transformer l'opérateur de la convolution en une multiplication ;
- La discrétisation du problème et l'utilisation de l'algèbre matricielle ;
- L'analyse fonctionnelle et la décomposition spectrale des opérateurs dans l'espace de Hilbert.

Mais avant d'essayer d'expliquer pourquoi regarder sur la figure qui suit

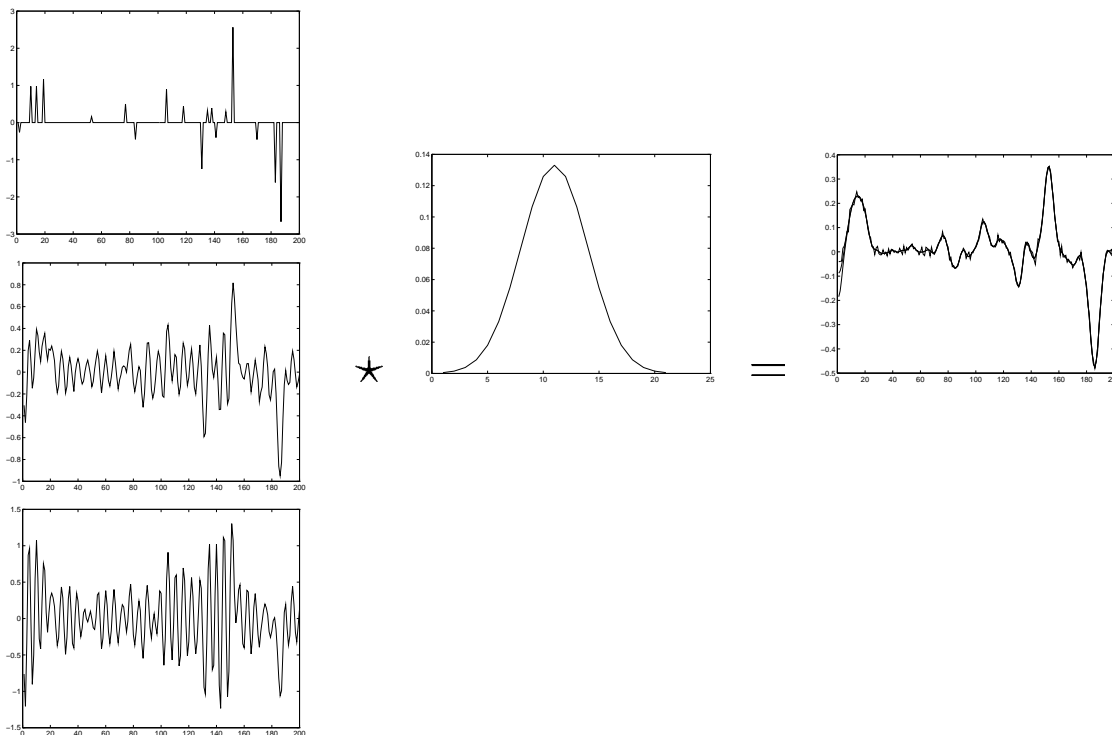


FIG. 4.6 - *Déconvolution : un problème mal-posé.*

On constate que trois signaux $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$ très différents à l'entrée d'un instrument ayant pour réponse impulsionnelle $h(t)$, ont fourni pratiquement les mêmes signaux $g_1(t)$, $g_2(t)$ et $g_3(t)$ de sortie (les trois signaux sont tracés sur un seul graphe). Ceci signifie qu'une méthode d'inversion se basant seulement sur une distance de sortie ne peut distinguer ces trois signaux.

4.4.1 Passage dans le domaine de FOURIER

Le schéma suivant résume l'essentiel de cette approche :

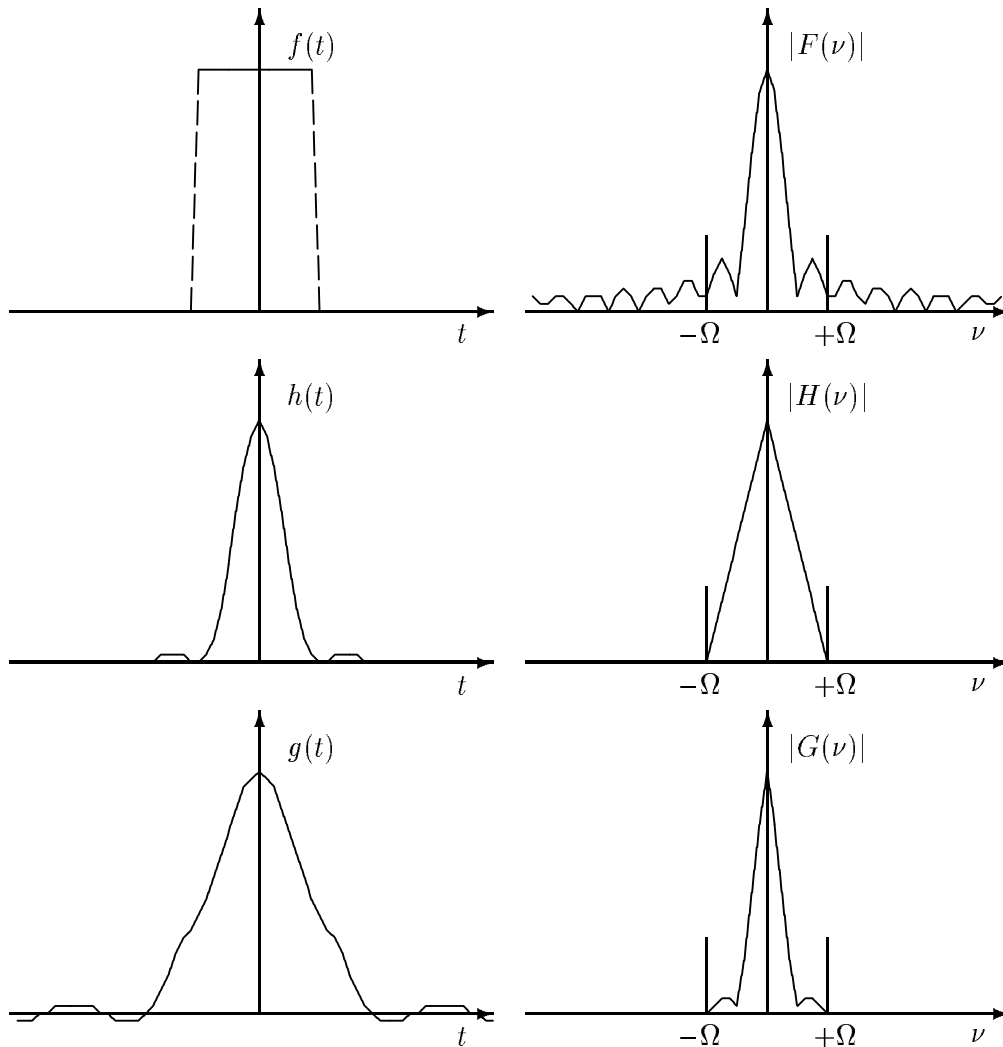


FIG. 4.7 - Déconvolution : un problème mal posé

En effet, on peut constater que tout signal $f(t)$ qui a même contenu spectral dans la bande passante de l'opérateur (l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$) fournit la même sortie $g(t)$.

La déconvolution est ainsi un problème inverse mal posé. Un moyen pour le rendre bien posé est de restreindre l'espace des solutions aux fonctions à spectre limité dans la bande $[-\Omega, \Omega]$:

$$F(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin [-\Omega, +\Omega]$$

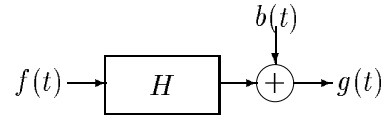
En faisant ceci, on retrouve le critère de Rayleigh classique, on assure l'unicité de la solution mais on n'a pas tout résolu. Une autre difficulté qui persiste est la sensibilité de la solution au bruit. En effet, lorsque les signaux mesurés sont bruités on a :

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega) + B(\omega) \longrightarrow F(\omega) = \frac{G(\omega)}{H(\omega)} + \frac{B(\omega)}{H(\omega)}$$

et il faut étudier le comportement de $B(\omega)/H(\omega)$ qui conditionne cette sensibilité.

4.4.2 Discrétisation

Considérons le modèle :



$$g(t) = \int f(t')h(t-t') dt' + b(t) = \int h(t')f(t-t') dt' + b(t)$$

et faisons les hypothèses suivantes :

- on discrétise les signaux $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ avec le même pas de d'échantillonnage $\Delta T = 1$,
- la réponse impulsionnelle est à support limité : $h(t) = 0, \forall t < -q\Delta T$, et $\forall t > p\Delta T$.

On peut alors écrire :

$$g(m) = \sum_{k=-q}^p h(k)f(m-k) + b(m), \quad m = 0, \dots, M$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{b} + \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(p) & \cdots & h(0) & \cdots & h(-q) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & h(p) & \cdots & h(0) & \cdots & h(-q) & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h(p) & \cdots & h(0) & \cdots & h(-q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(-p) \\ \vdots \\ f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(M) \\ f(M+1) \\ \vdots \\ f(M+q) \end{pmatrix}$$

Notons que \mathbf{g} est de dimension $M+1$, \mathbf{f} de dimension $M+p+q+1$, $\mathbf{h} = [h(p), \dots, h(0), \dots, h(-q)]$ de dimension $(p+q+1)$ et la matrice \mathbf{H} de dimensions $(M+1) \times (M+p+q+1)$.

Maintenant si on fait l'hypothèse que le système est causal, on a $q = 0$ et

$$\begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(p) & \cdots & h(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & h(p) & \cdots & h(0) & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h(p) & \cdots & h(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(-p) \\ \vdots \\ f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(M) \end{pmatrix}$$

4.4.3 Décomposition spectrale

– $\mathbf{H} : F \mapsto G$ linéaire borné et Hilbertien

$\{\psi_k, \phi_k; \lambda_k^2\}$ système singulier de \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} \psi_k = \lambda_k \phi_k, \quad \mathbf{H}^* \phi_k = \lambda_k \psi_k$$

$$\mathbf{H} \mathbf{H}^* \phi_k = \lambda_k^2 \phi_k, \quad \mathbf{H}^* \mathbf{H} \psi_k = \lambda_k^2 \psi_k$$

– Résolution de $\mathbf{H}^* \mathbf{g} = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \mathbf{f}$ par projection :

$\{\psi_k\}$ base de G , $\{\phi_k\}$ base de F

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \phi_k \rangle \psi_k$$

– **Théorème de Hilbert-Schmidt :**

Si \mathbf{H} est compact, alors 0 est le seul point d'accumulation de $\{\lambda_k^2\}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^2 = 0 \quad \exists k_0 : \forall k > k_0, \lambda_k = 0$$

⇓

$$x + \delta x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \phi_k \rangle \left[1 + \frac{\langle \delta y, \phi_k \rangle}{\langle y, \phi_k \rangle} \right] \psi_k$$

◇ Changer la notion de la solution

4.5 Changer la notion de solution

- Bien définir le problème direct $H : F \mapsto G$
- Pour tout $g \in G$, étudier l'existence des sous ensembles non vides de $F : Hf = g$
- Rechercher et définir des applications $G \mapsto F$
- étudier le problème des erreurs après avoir donné à F et G des structures d'espaces métriques.

Les propriétés de la solution ne sont pas
entièrement contenues dans $g = Hf$

- Solutions approchées $\hat{f} : \|H\hat{f} - g\| \leq \epsilon, \epsilon > 0$ fixé
- Quasi-solutions $\hat{f} : \|g - H\hat{f}\| \leq \|g - Hf\|, \forall f \in F$
- Changement d'espace ou de topologie
- Opérateurs régularisants
- Concepts probabilistes

