

Chapitre 12

Étude de cas et exemples d'applications

Dans ce chapitre nous étudierons un certain nombre de problèmes classiques comme la déconvolution des signaux, la restauration d'image, la reconstruction d'images en tomographie X, la reconstruction d'images en tomographie à ondes diffractées, la reconstruction d'images par courants de FOUCAULT en contrôle non destructif, etc.

12.1 Déconvolution des signaux

12.1.1 Un problème d'instrumentation

Voici un exemple de problème où les mesures effectuées par l'instrument ne sont pas satisfaisantes et il est impossible de changer l'instrument. On voudrait cependant corriger les défauts de l'instrument par une méthode numérique de déconvolution.

Dans cet exemple nous allons étudier successivement les problèmes suivants :

- l'estimation de la réponse impulsionnelle d'un système de mesure à partir de sa réponse indicelle;
- l'estimation de la réponse impulsionnelle d'un système de mesure à partir de sa sortie à une entrée quelconque mais connue;
- l'estimation de l'entrée lorsque la réponse impulsionnelle est connue (déconvolution simple);
- l'estimation de l'entrée lorsque la réponse impulsionnelle n'est pas connue (déconvolution aveugle);

Nous examinerons :

- Méthodes naïves
- Filtre de Wiener
- Régularisation quadratique pour l'inversion
- Régularisation quadratique pour l'estimation de la réponse impulsionnelle
- Une méthode de déconvolution aveugle basée sur la régularisation quadratique

12.1.2 Méthodes naïves

Il s'agit d'examiner les résultats que l'on obtient lorsqu'on utilise une méthode naïve du type filtrage inverse pour inversion :

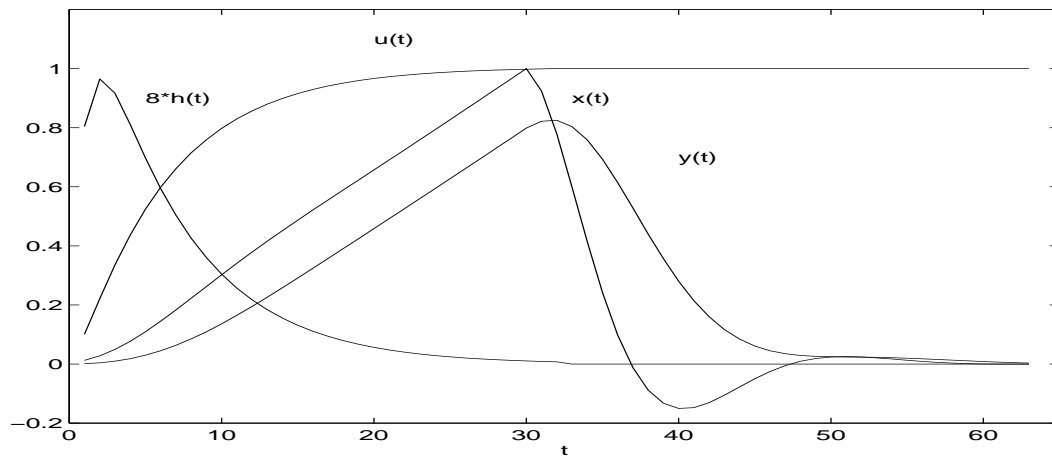
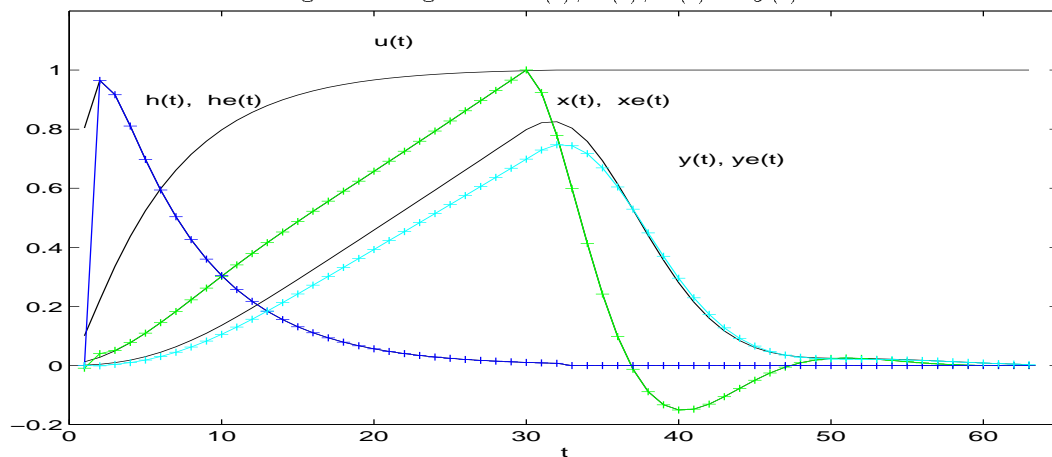
$$y(t) = h(t) * x(t) + b(t) \longrightarrow \text{TF} \longrightarrow Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) + B(\omega) \longrightarrow$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} Y(\omega) \longrightarrow \text{TF inverse} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

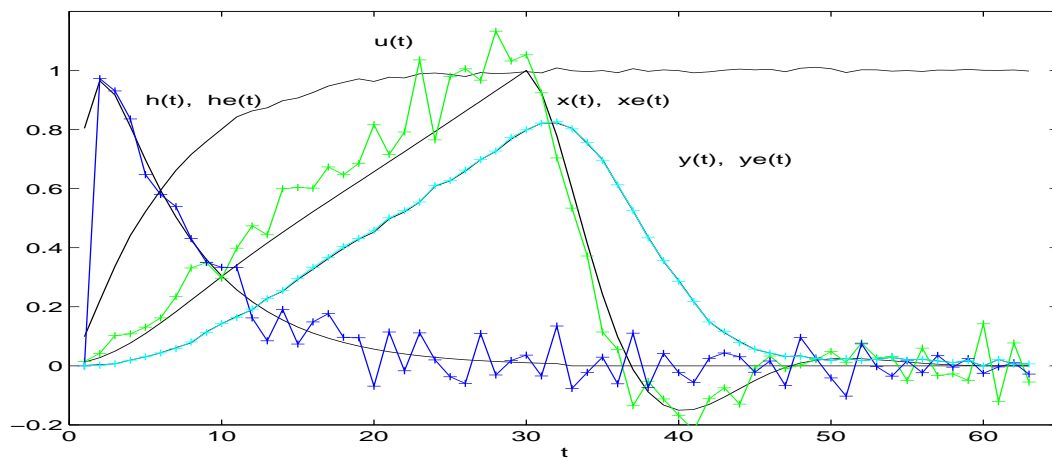
et du type dérivation de la réponse indicelle pour le calcul de la réponse impulsionnelle :

$$u(t) = \int_0^t h(t) dt \longrightarrow h(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Effectivement, comme le montre les figures qui suivent, ces méthodes peuvent marcher lorsqu'il n'y a pas du bruit. Mais, en présence du bruit, même très très faible, ces méthodes échouent très facilement.

Signaux originaux: $u(t)$, $h(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ 

Pas de bruit : tout va bien.



Avec bruit : rien ne va plus

FIG. 12.1 - Méthodes naïves :

On calcule $h(t)$ en dérivant $u(t)$ et $x(t)$ par filtrage inverse. Lorsqu'il n'y a pas de bruit, tout va bien, mais lorsqu'on rajoute un bruit sur les données les résultats deviennent très vite inexploitables.

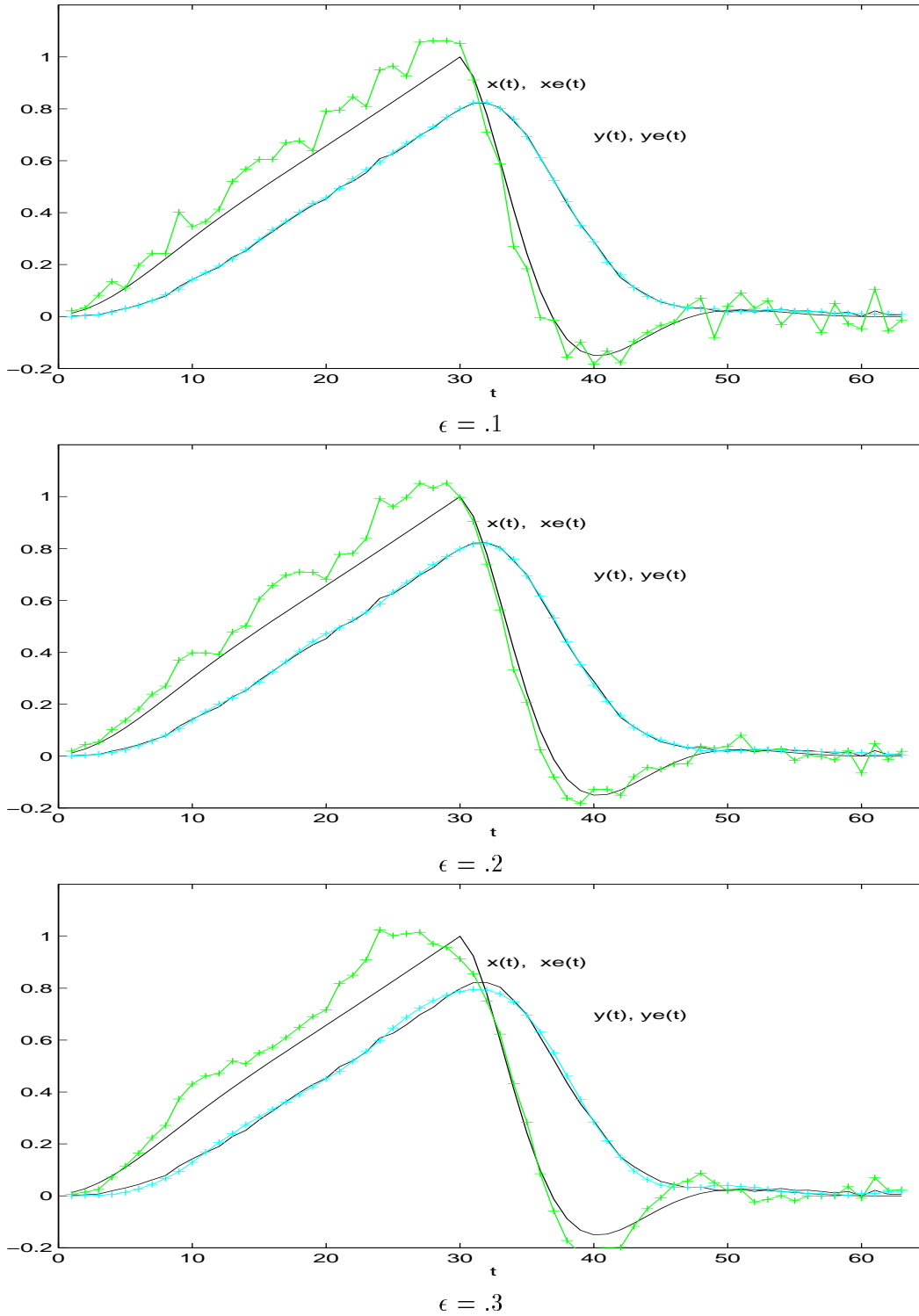


FIG. 12.2 - **Méthodes naïves** : On bricole en remplaçant tous les valeurs de $|H(\omega)| < \epsilon$ par $|H(\omega)| = \epsilon$ pour tenter d'éliminer la source d'ennui, mais sans succès. Trois valeurs de ϵ sont essayées.

12.1.3 Filtre de Wiener pour l'inversion

Dans cette étude, nous considérons seulement le problème de la déconvolution simple, en faisant l'hypothèse que la réponse impulsionnelle est connue parfaitement. La solution est calculée par

$$\hat{X}(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \frac{S_{bb}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}} Y(\omega)$$

avec l'hypothèse $\frac{S_{bb}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = r$ et différentes valeurs pour r .

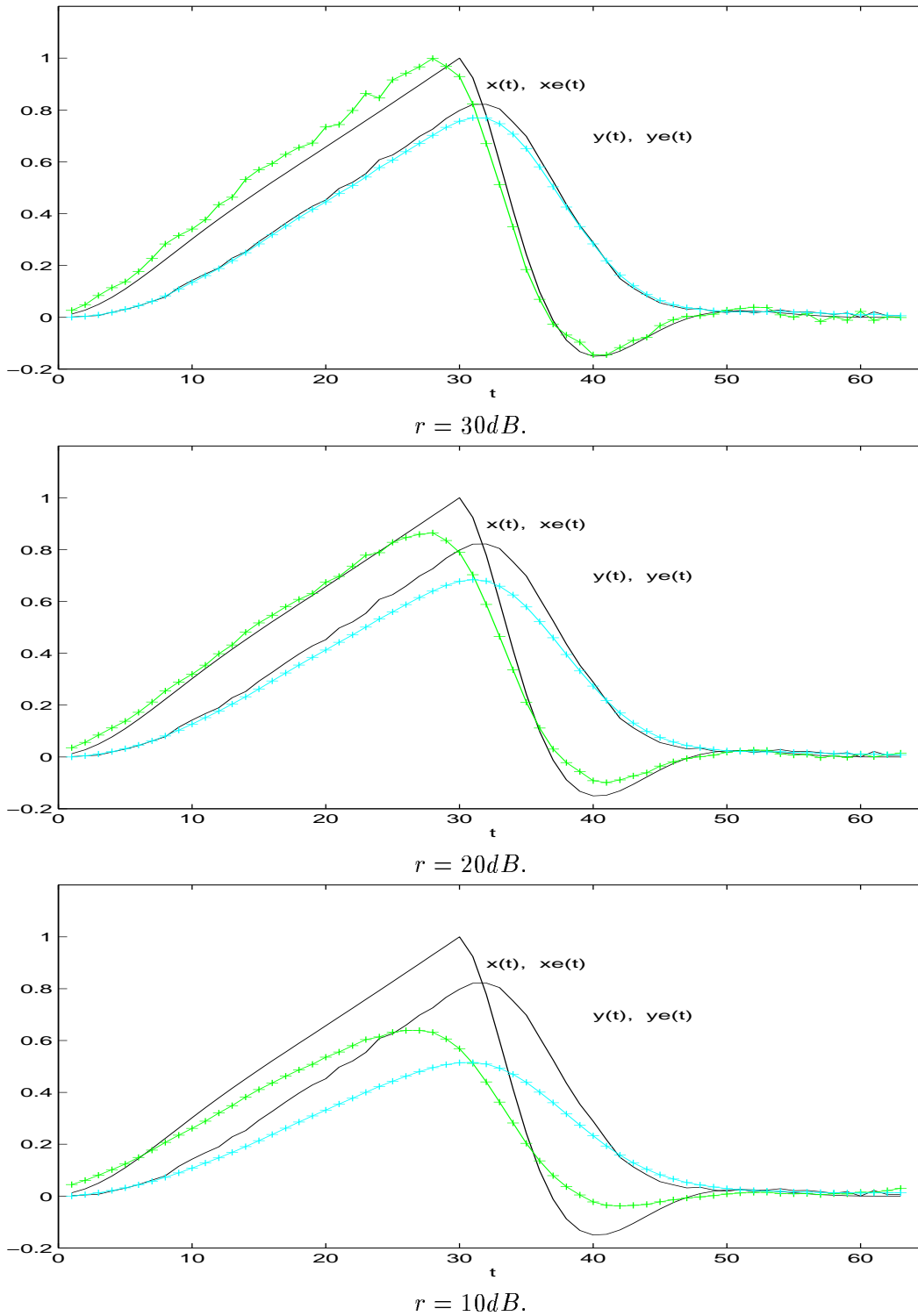


FIG. 12.3 - **Filtre de Wiener en déconvolution :**

On essaie le filtre de Wiener avec l'hypothèse $\frac{S_{xx}(\omega)}{S_{bb}(\omega)} = r$ pour différentes valeurs de r .

12.1.4 Régularisation quadratique pour l'inversion

Dans cette étude, nous considérons seulement le problème de la déconvolution simple, en faisant l'hypothèse que la réponse impulsionnelle est connue parfaitement. La solution est calculée par

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \mathbf{D} \right)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{y}$$

avec différentes valeurs pour le paramètre de régularisation λ .

Deux cas sont étudiés correspondant à deux choix pour la matrice \mathbf{D} :

- régularisation d'ordre zéro: $\mathbf{D} = \mathbf{I}$
- régularisation d'ordre un: $\mathbf{D} = \text{TOEPLITZ}[-1, 1]$ est une matrice des différences finies d'ordre un.

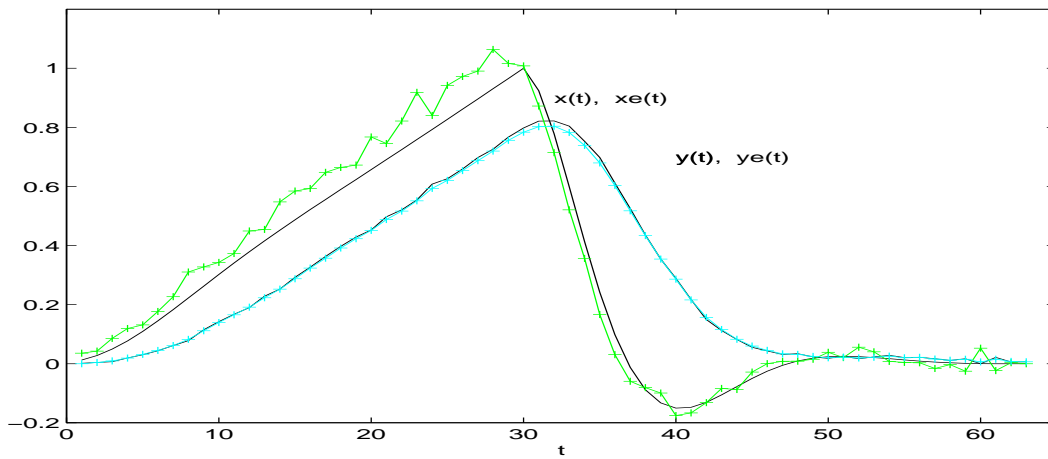
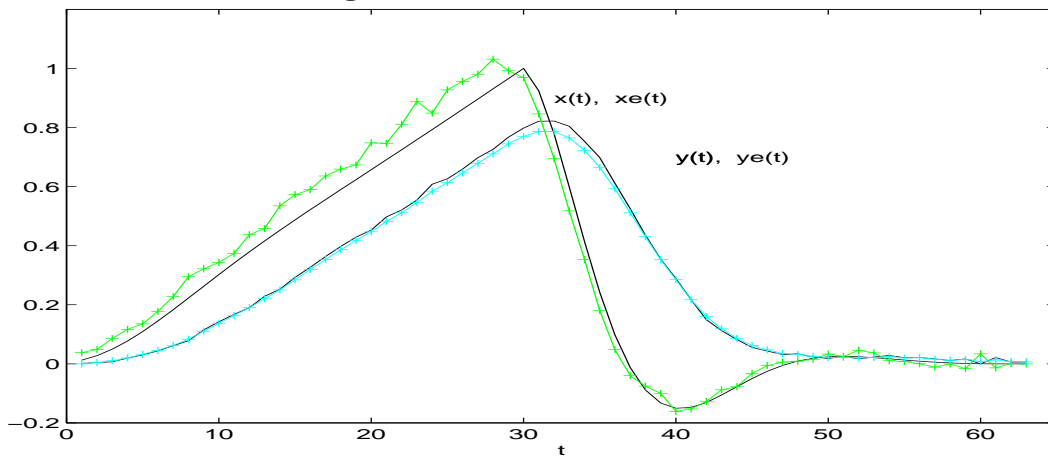
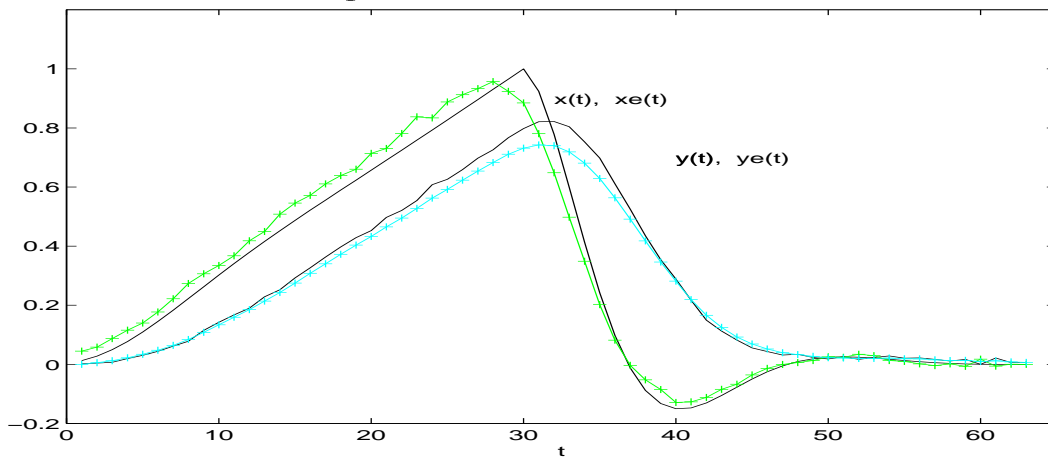
Régularisation d'ordre zéro. $\lambda = .01$ Régularisation d'ordre zéro. $\lambda = .02$ Régularisation d'ordre zéro. $\lambda = .05$

FIG. 12.4 - Déconvolution par régularisation d'ordre zéro.

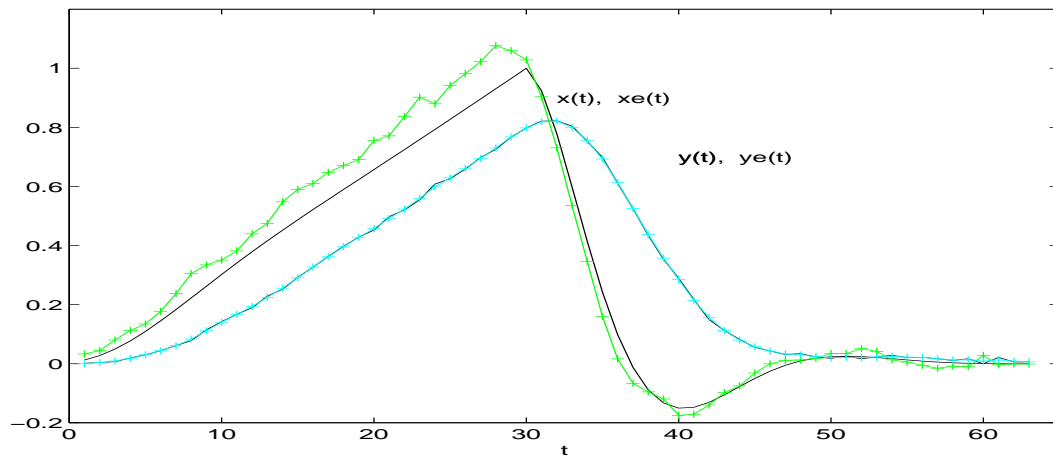
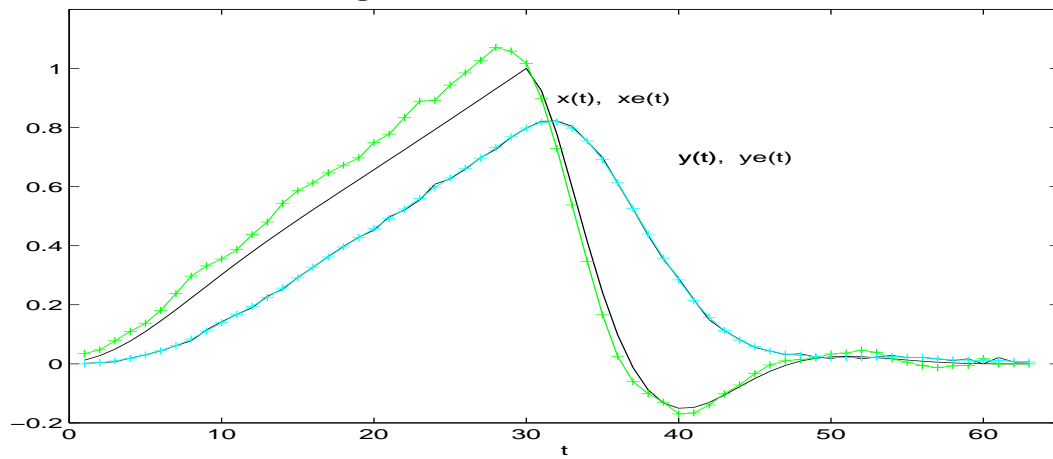
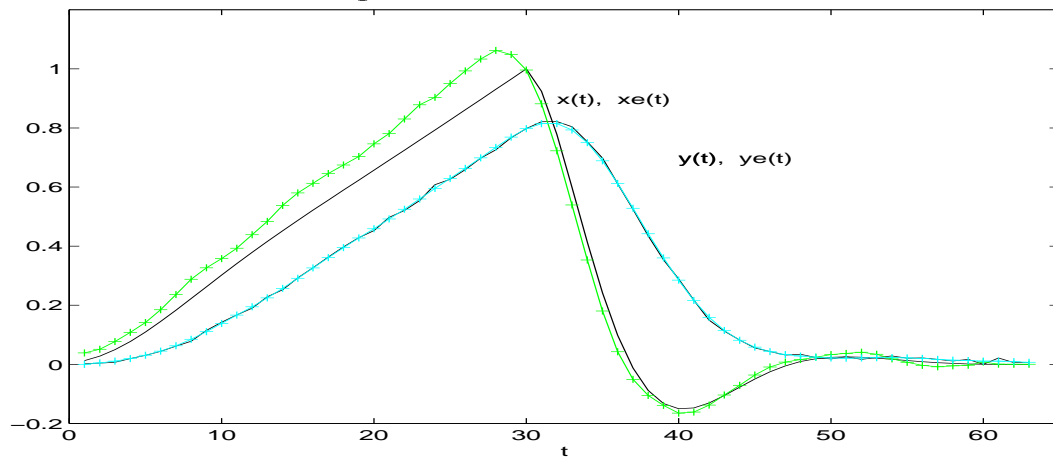
Régularisation d'ordre un. $\lambda = .01$ Régularisation d'ordre un. $\lambda = .02$ Régularisation d'ordre un. $\lambda = .05$

FIG. 12.5 - Déconvolution par régularisation d'ordre un.

12.1.5 Régularisation quadratique pour l'estimation de la réponse impulsionnelle

Dans cette étude, nous considérons seulement le problème de l'estimation de la réponse impulsionnelle $h(t)$ à partir de la réponse indicielle $u(t)$. Notons que la relation entre ces deux grandeurs s'écrit :

$$u(t) = \int_0^t h(t) dt \longrightarrow h(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Discrétisation :

$$u(m) = \sum_{k=0}^m h(k) \longrightarrow \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(M) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{h}$$

Solution régularisée :

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{u}$$

Dans le cas plus général où l'entrée est un signal quelconque, on a :

$$y(t) = [h * f](t) + b(t)$$

Discrétisation :

$$y(m) = \sum_{k=0}^M x(k)h(m-k) + b(m)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(p) \\ \vdots \\ y(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x(1) & x(0) & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ x(p) & & & & x(0) & \\ x(p+1) & x(p) & & & x(1) & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ x(M) & \cdots & & \cdots & x(M-p) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(p) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{X} = \text{TOEPLITZ}(\mathbf{x}),$$

Solution régularisée :

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{y}$$

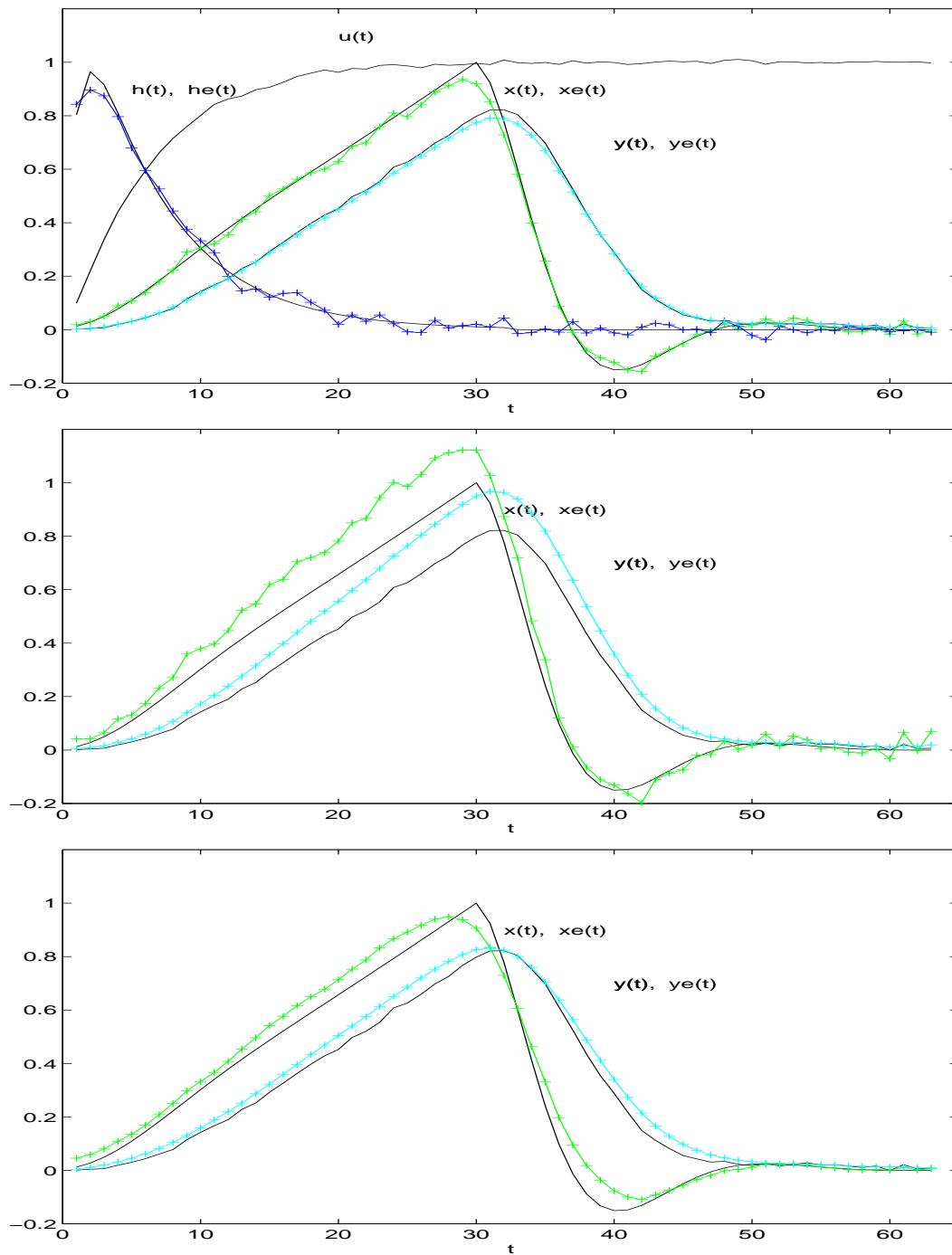


FIG. 12.6 - Exemple de résultat. On estime d'abord $h(t)$ à partir de $u(t)$ et on l'utilise pour l'estimation de $x(t)$ à partir de $y(t)$

12.1.6 Déconvolution aveugle

Estimation simultanée de la réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'entrée $x(t)$ à partir de la sortie $y(t)$.

$$y(t) = [h * f](t) + b(t)$$

Discrétisation :

$$y(m) = \sum_{k=0}^p h(k)x(m-k) + b(m) \quad \text{ou} \quad y(m) = \sum_{k=0}^M x(k)h(m-k) + b(m)$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(p) \\ \vdots \\ y(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ h(1) & h(0) & & & & & \vdots \\ \vdots & h(1) & & & & & \vdots \\ h(p) & & & & & & \vdots \\ 0 & h(p) & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & h(0) & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h(p) & \cdots & h(1) & h(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M-p) \\ \vdots \\ x(M) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(p) \\ \vdots \\ y(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ x(1) & x(0) & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x(p) & & & & & & x(0) \\ x(p+1) & x(p) & & & & & x(1) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x(M) & \cdots & & \cdots & \cdots & & x(M-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(p) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{ou} \quad \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{b} \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} = \text{TOEPLITZ}(\mathbf{h}), \quad \mathbf{X} = \text{TOEPLITZ}(\mathbf{x}),$$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{h}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \right]$$

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \left[-\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{D}_x \mathbf{x}\|^2 \right]$$

$$p(\mathbf{h}) \propto \exp \left[-\frac{\beta}{2} \|\mathbf{D}_h \mathbf{h}\|^2 \right]$$

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{h}|\mathbf{y}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_b^2} J(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \right]$$

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \lambda_1 \|\mathbf{D}_h \mathbf{h}\|^2 + \lambda_2 \|\mathbf{D}_x \mathbf{x}\|^2$$

Estimation au sens du MAP :

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{h}}) = \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{h})} \{J(\mathbf{x}, \mathbf{h})\}$$

Mise en œuvre :

On constate que J est quadratique en \mathbf{x} à \mathbf{h} fixé et quadratique en \mathbf{h} à \mathbf{x} fixé. On peut utiliser cette constatation pour proposer un algorithme itérative :

$$\hat{\mathbf{x}}^{(k)} = \arg \min_{(\mathbf{x})} \{J(\mathbf{x}, \mathbf{h}^{(k-1)})\}$$

$$\hat{\mathbf{h}}^{(k)} = \arg \min_{(\mathbf{h})} \{J(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{h})\}$$

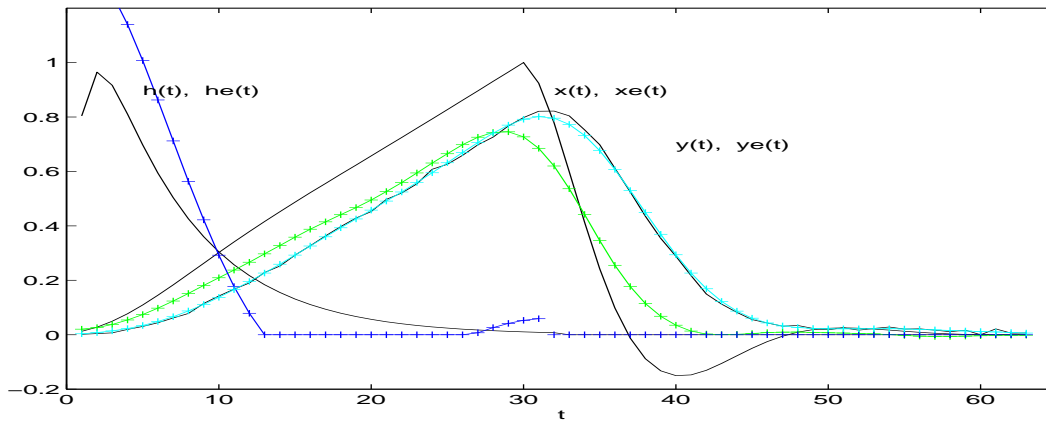
$$\hat{H}(\omega) = \frac{X^*(\omega)}{|X(\omega)|^2 + \lambda_1 D_h(\omega)} Y(\omega)$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \lambda_2 D_x(\omega)} Y(\omega)$$

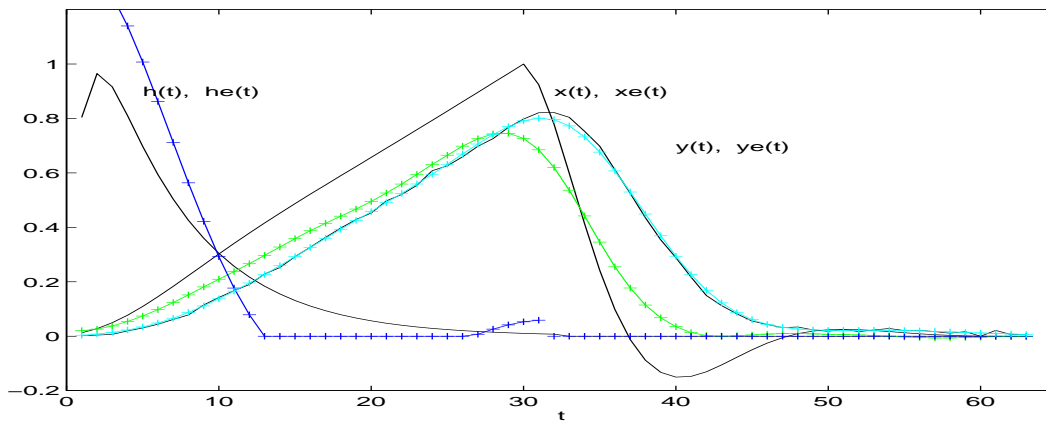
Dans le cas de la restauration d'image :

$$\hat{H}(\omega_x, \omega_y) = \frac{X^*(\omega_x, \omega_y)}{|X(\omega_x, \omega_y)|^2 + \lambda_1 D_h(\omega_x, \omega_y)} Y(\omega_x, \omega_y)$$

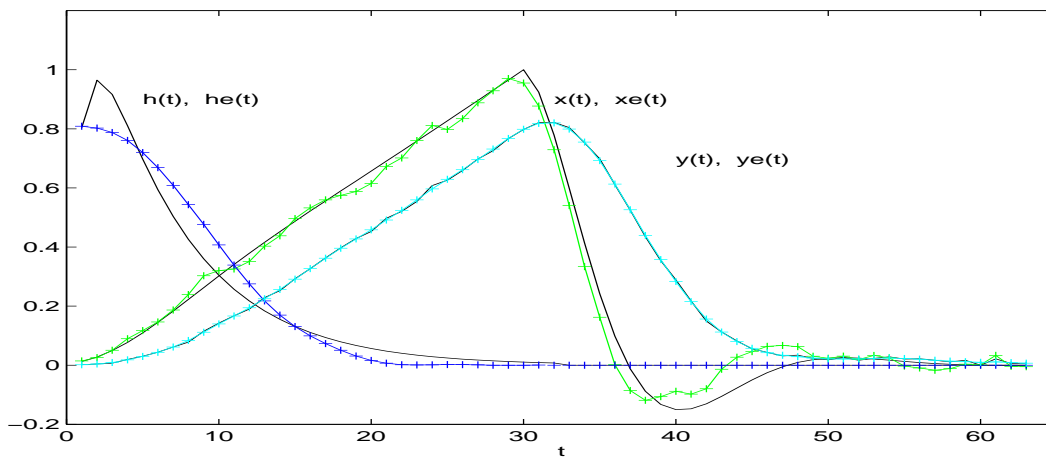
$$\hat{X}(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \lambda_2 D_x(\omega_x, \omega_y)} Y(\omega_x, \omega_y)$$



Résultat à l'itération 1



Résultat à l'itération 2



Résultat à l'itération finale.

FIG. 12.7 - Déconvolution aveugle :

Exemples de résultats de l'estimation simultanée de $h(t)$ et de $x(t)$ à partir de $y(t)$ avec trois jeux de paramètres différents pour $(\lambda_1, \lambda_2) = \{(20, 1), (10, 1), (20, 05)\}$.

Écriture des relations en continu:

Considérons le problème de la déconvolution aveugle des signaux :

$$g(t) = h(t) * f(t) + b(t)$$

et définissons le critère suivant :

$$J(f, h) = \|g - h * f\|^2 + \lambda_1 \|d_1 * f\|^2 + \lambda_2 \|d_2 * h\|^2$$

où $d_1(t)$ et $d_2(t)$ sont deux fonctions connues.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial f} &= -2h(-t) * [g(t) - h(t) * f(t)] + 2\lambda_1 d_1(-t) * [d_1(t) * f(t)] \\ \frac{\partial J}{\partial h} &= -2f(-t) * [g(t) - h(t) * f(t)] + 2\lambda_2 d_2(-t) * [d_2(t) * h(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [h(-t) * h(t) + \lambda_1 d_1(-t) * d_1(t)] * f(t) &= h(-t) * g(t) \\ [f(-t) * f(t) + \lambda_2 d_2(-t) * d_2(t)] * h(t) &= f(-t) * g(t) \end{aligned}$$

Passant dans le domaine de FOURIER on obtient :

$$\begin{aligned} [|H(\omega)|^2 + \lambda_1 |D_1(\omega)|^2] F(\omega) &= H^*(\omega) G(\omega) \\ [|F(\omega)|^2 + \lambda_2 |D_2(\omega)|^2] H(\omega) &= F^*(\omega) G(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{H^*(\omega) G(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \lambda_1 |D_1(\omega)|^2} \\ H(\omega) &= \frac{F^*(\omega) G(\omega)}{|F(\omega)|^2 + \lambda_2 |D_2(\omega)|^2} \end{aligned}$$

Déconvolution avec une étape de calibration :

Considérons maintenant le cas où, en plus des données, nous avons eu la possibilité d'effectuer une calibration :

$$\begin{aligned} g_c(t) &= h(t) * f_c(t) + b_1(t) \\ g(t) &= h(t) * f(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

et définissons le critère suivant :

$$J(f, h) = \|g_c - h * f_c\|^2 + \|g - h * f\|^2 + \lambda_1 \|d_1 * f\|^2 + \lambda_2 \|d_2 * h\|^2$$

où $d_1(t)$ et $d_2(t)$ sont deux fonctions connues.

$$\frac{\partial J}{\partial f} = -2h(-t) * [g(t) - h(t) * f(t)] + 2\lambda_1 d_1(-t) * [d_1(t) * f(t)]$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -2f_c(-t) * [g_c(t) - h(t) * f_c(t)] - 2f(-t) * [g(t) - h(t) * f(t)] + 2\lambda_2 d_2(-t) * [d_2(t) * h(t)]$$

$$[h(-t) * h(t) + \lambda_1 d_1(-t) * d_1(t)] * f(t) = h(-t) * g(t)$$

$$[f(-t) * f(t) + f_c(-t) * f_c(t) + \lambda_2 d_2(-t) * d_2(t)] * h(t) = f_c(-t) * g_c(t) + f(-t) * g(t)$$

Passant dans le domaine de FOURIER on obtient :

$$\left[|H(\omega)|^2 + \lambda_1 |D_1(\omega)|^2 \right] F(\omega) = H^*(\omega) G(\omega)$$

$$\left[|F_c(\omega)|^2 + |F(\omega)|^2 + \lambda_2 |D_2(\omega)|^2 \right] H(\omega) = F_c^*(\omega) G_c(\omega) + F^*(\omega) G(\omega)$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{H^*(\omega) G(\omega)}{\left[|H(\omega)|^2 + \lambda_1 |D_1(\omega)|^2 \right]} \\ H(\omega) &= \frac{F_c^*(\omega) G_c(\omega) + F^*(\omega) G(\omega)}{\left[|F_c(\omega)|^2 + |F(\omega)|^2 + \lambda_2 |D_2(\omega)|^2 \right]} \end{aligned}$$

12.2 Restauration d'image

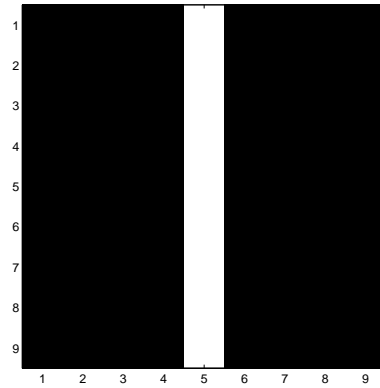
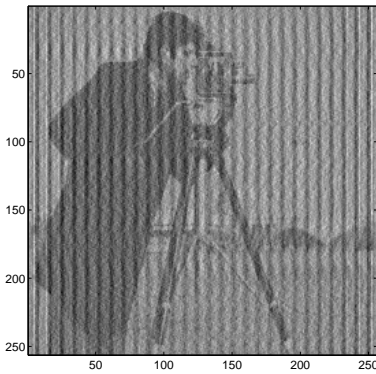
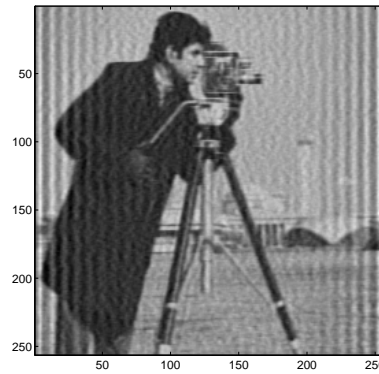
Image d'entrée $f(x, y)$ La réponse impulsionnelle $h(x, y)$ 

Image de sortie sans bruit

Image de sortie $g(x, y)$ avec bruit RSB=20 dB.

Restoration sans régularisation



Restoration avec régularisation

FIG. 12.8 - *Restoration d'image sans et avec régularisation*

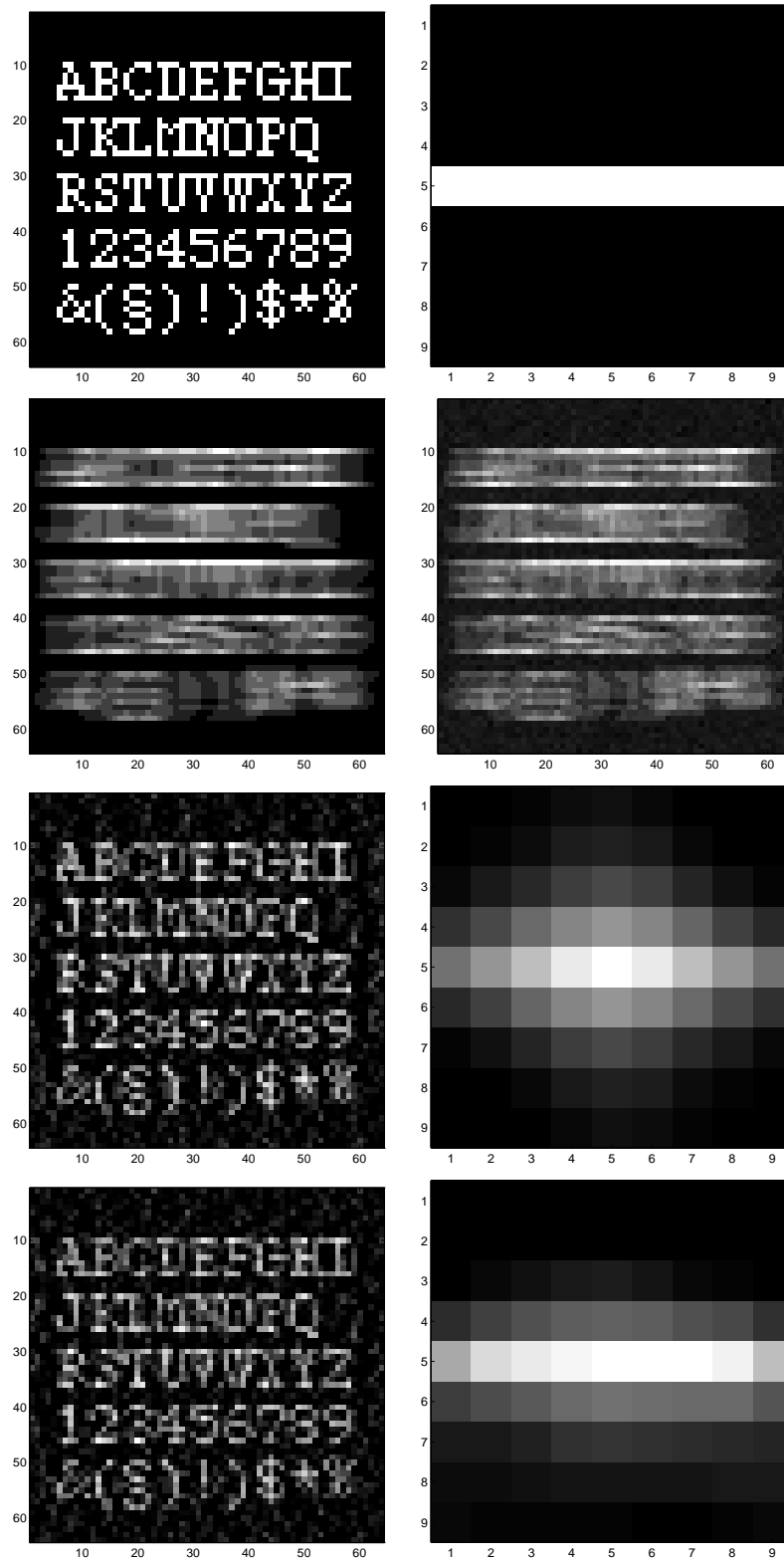


FIG. 12.9 - *Restauration aveugle d'image :*

- a) Image originale, b) réponse impulsionnelle*
c) Image dégradée sans bruit, d) Image dégradée avec bruit (données)
e) réponse impulsionnelle à initialisation, f) Image estimée à initialisation,
g) réponse impulsionnelle estimée, h) Image estimée

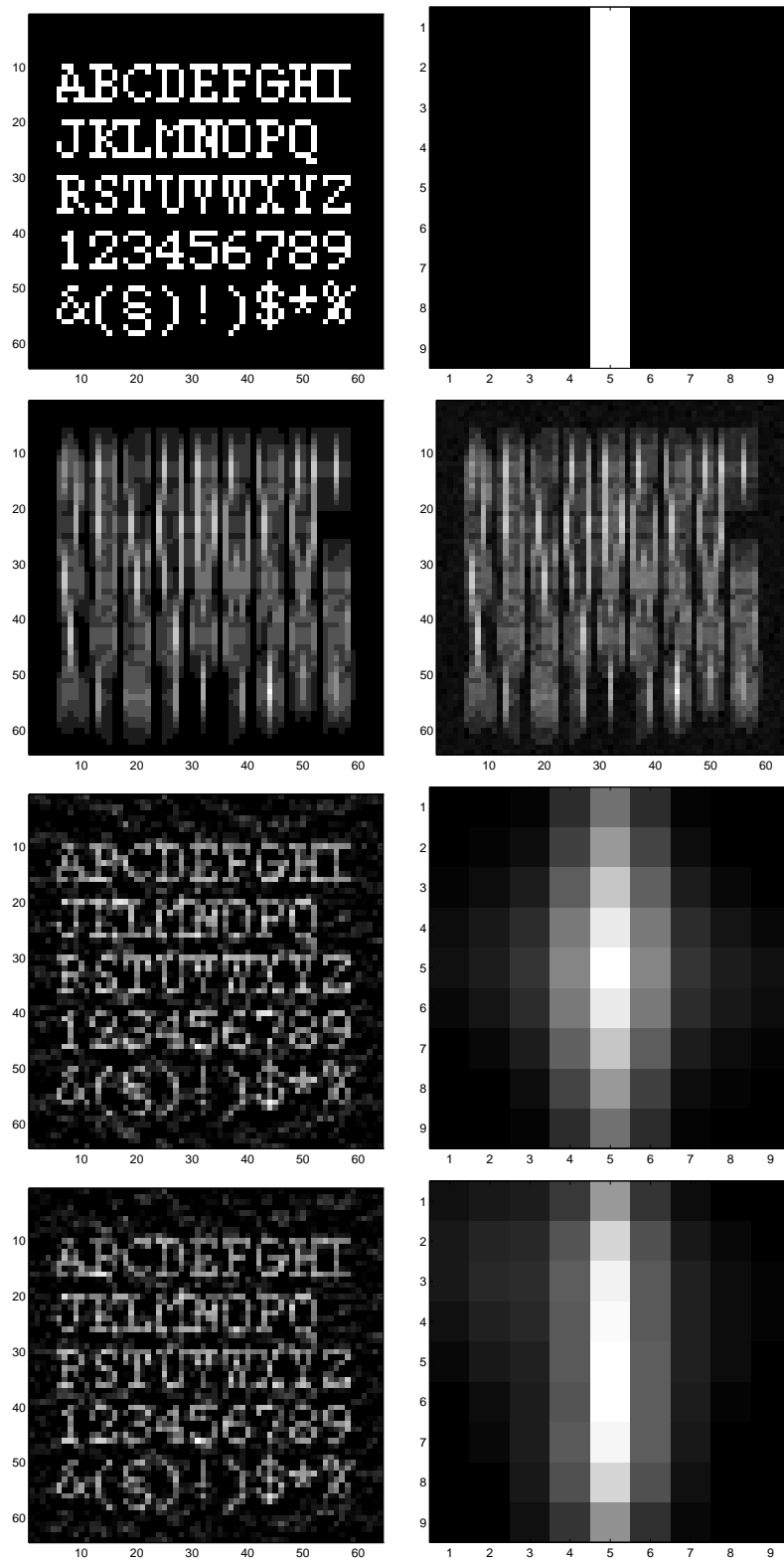


FIG. 12.10 - *Restauration aveugle d'image :*

- a) *Image originale,* b) *réponse impulsionnelle*
 c) *Image dégradée sans bruit,* d) *Image dégradée avec bruit (données)*
 e) *réponse impulsionnelle à initialisation,* f) *Image estimée à initialisation,*
 g) *réponse impulsionnelle estimée,* h) *Image estimée*

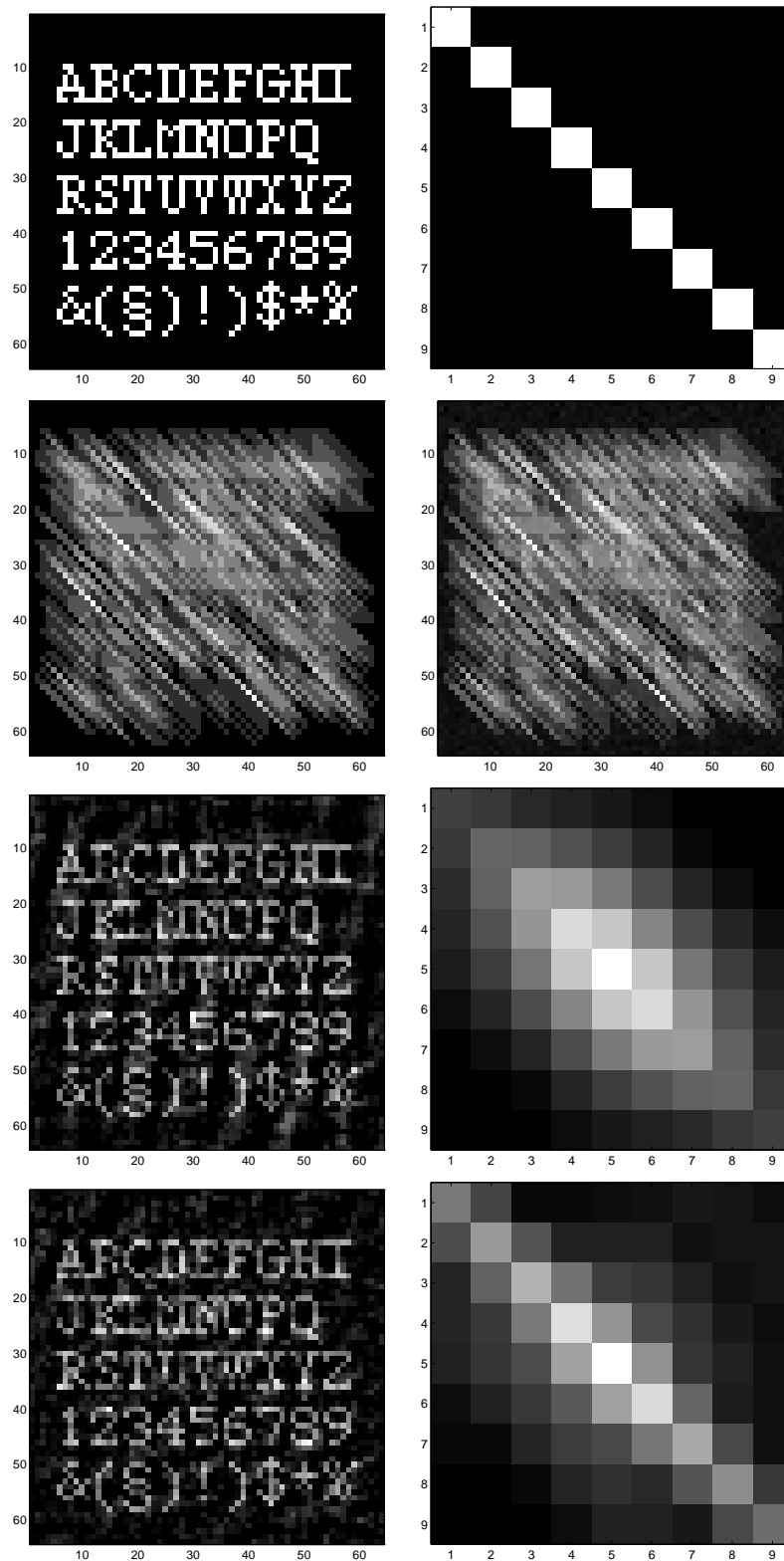


FIG. 12.11 - *Restauration aveugle d'image :*

- a) Image originale, b) réponse impulsionnelle*
c) Image dégradée sans bruit, d) Image dégradée avec bruit (données)
e) réponse impulsionnelle à initialisation, f) Image estimée à initialisation,
g) réponse impulsionnelle estimée, h) Image estimée

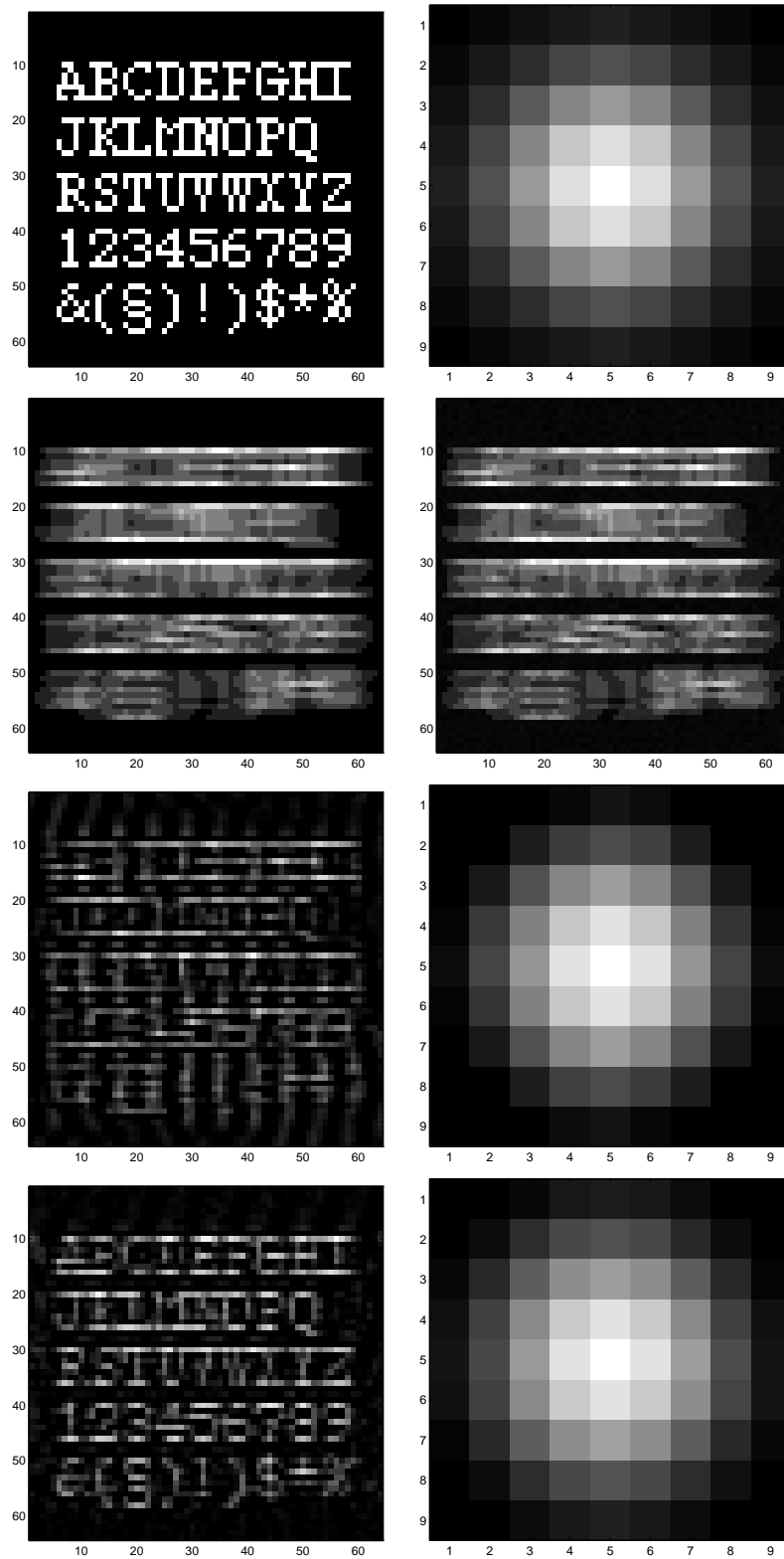


FIG. 12.12 - *Restauration aveugle d'image :*

- a) *Image originale,* b) *réponse impulsionnelle*
 c) *Image dégradée sans bruit,* d) *Image dégradée avec bruit (données)*
 e) *réponse impulsionnelle à initialisation,* f) *Image estimée à initialisation,*
 g) *réponse impulsionnelle estimée,* h) *Image estimée*

12.3 Reconstruction d'image en tomographie X

12.4 Reconstruction d'image en tomographie microondes

12.5 Reconstruction d'image en CND par courant de FOUCAULT

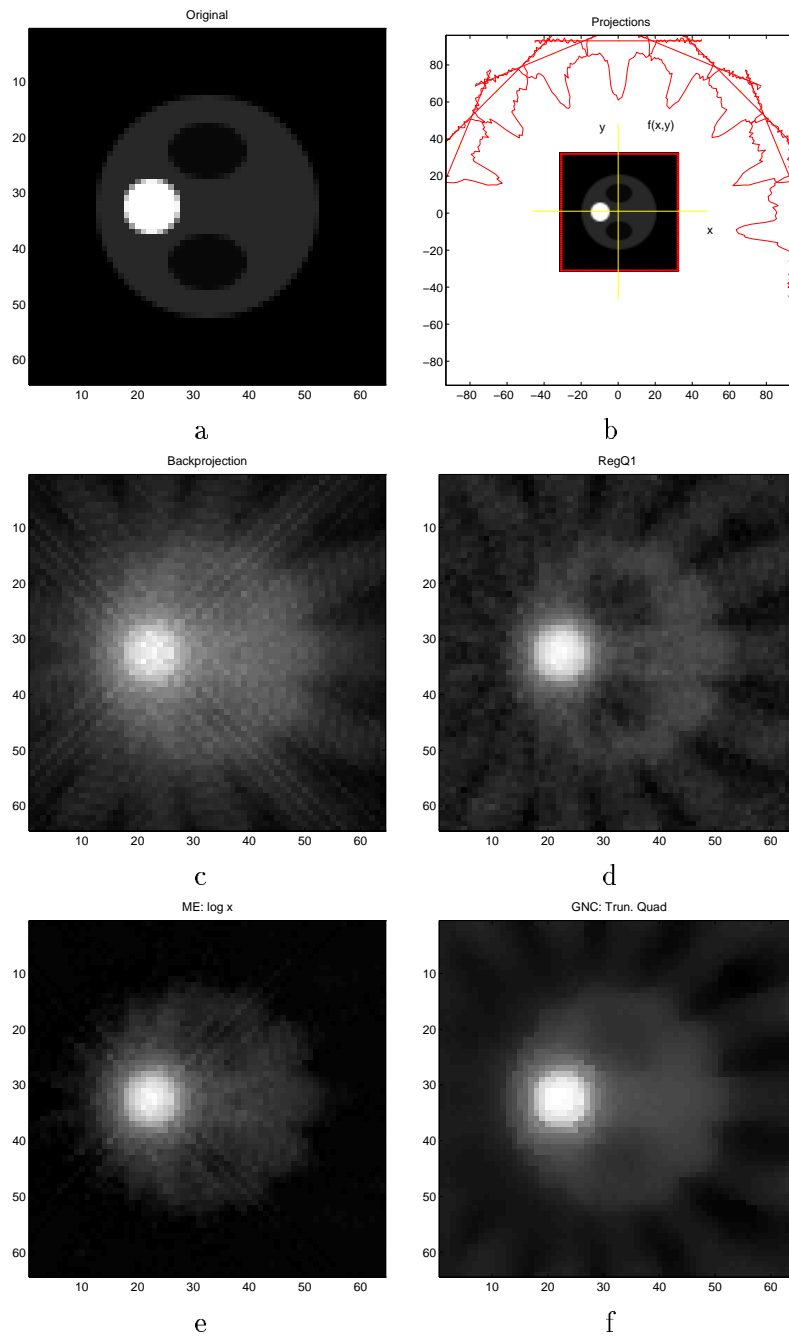


FIG. 12.13 - *Reconstruction d'image en tomographie X :*

- a) objet originale, b) projections (données),*
- c) Reconstruction par rétroprojection, d) Reconstruction par régularisation quadratique,*
- d) Reconstruction par ME,*
- e) Reconstruction par modèle markovien et GNC,*