

# Problèmes inverses

Ali Mohammad-Djafari

Cours du DEA Automatique et Traitement du Signal

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-ESE-UPS)  
École Supérieure d'Électricité  
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Version provisoire du: 3 septembre 1999<sup>1</sup>

1. Rapport interne LSS: fichier poly.tex



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Exemples de problèmes inverses</b>	<b>13</b>
2.1	Instrumentation . . . . .	14
2.2	Tomographie à rayons X . . . . .	15
2.3	Imagerie à ondes diffractées : cadre général . . . . .	20
2.4	Imagerie micro ondes : cas 2D . . . . .	23
2.5	Imagerie micro ondes : cas 3D . . . . .	27
2.6	Imagerie par courants de FOUCAULT . . . . .	28
2.7	Imagerie à émission de positons . . . . .	35
2.8	Imagerie à résonance magnétique nucléaire RMN . . . . .	37
2.9	Imagerie radar à ouverture synthétique : SAR . . . . .	40
2.10	Imagerie en géophysique . . . . .	42
2.11	Imagerie en radio astronomie . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Cadre général et unification</b>	<b>45</b>
3.1	Présentation du cadre général . . . . .	46
3.2	Exemples classiques de problèmes inverses linéaires . . . . .	49
3.2.1	Déconvolution de signaux 1-D . . . . .	49
3.2.2	Débruitage ou filtrage . . . . .	50
3.2.3	Restauration d'image . . . . .	51
3.2.4	Reconstruction d'image en tomographie X . . . . .	52
3.2.5	Radiographie des objets cylindriques . . . . .	54
3.2.6	Synthèse d'ouverture en radio astronomie ou imagerie radar . . . . .	56
3.2.7	Synthèse de FOURIER en reconstruction tomographique d'image . . . . .	57
3.2.8	Synthèse de FOURIER-LAPLACE . . . . .	59
3.3	Exemples de problèmes inverses non linéaires . . . . .	60
3.3.1	Imagerie par ondes diffractées . . . . .	60
3.3.2	Tomographie d'impédance . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Problèmes mal-posés</b>	<b>63</b>
4.1	Rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .	64
4.2	Définitions . . . . .	68
4.3	Exemples de problèmes mal-posés . . . . .	69
4.4	Déconvolution : un problème mal-posé . . . . .	72
4.4.1	Passage dans le domaine de FOURIER . . . . .	73
4.4.2	Discretisation . . . . .	74
4.4.3	Décomposition spectrale . . . . .	76

4.5	Changer la notion de solution . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Moindres carrés et inversion généralisée</b>	<b>79</b>
5.1	Définition en dimension infinie . . . . .	80
5.2	Définition en dimension finie . . . . .	81
5.3	Algorithmes d'inversion généralisée . . . . .	83
5.4	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	83
5.4.1	Méthode de BIALY . . . . .	85
5.4.2	Méthode de LANDWEBER . . . . .	85
5.4.3	Méthode de VAN-CITTERT . . . . .	85
5.4.4	Méthode de KACZMARZ . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Régularisation</b>	<b>87</b>
6.1	Définition d'un opérateur de régularisation . . . . .	87
6.2	Décomposition tronquée en valeurs singulières . . . . .	88
6.3	Régularisation par méthodes itératives . . . . .	89
6.4	Introduction de contraintes supplémentaires . . . . .	89
6.5	Régularisation avec <i>a priori</i> de douceur . . . . .	90
6.6	Algorithmes de régularisation . . . . .	91
6.6.1	Méthode de HUNT (approximation circulante) . . . . .	92
6.6.2	Méthodes itératives . . . . .	95
6.6.3	Méthodes récursives . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Classification des méthodes d'inversion</b>	<b>107</b>
7.1	Méthodes analytiques . . . . .	108
7.2	Méthodes de développement en série . . . . .	112
7.3	Méthodes de décomposition sur une base . . . . .	115
7.4	Méthodes algébriques déterministes . . . . .	119
7.5	Méthodes probabilistes . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Approches probabilistes</b>	<b>123</b>
8.1	Approche n'utilisant que les moments . . . . .	124
8.2	Estimation au sens du maximum de vraisemblance . . . . .	127
8.3	Approche du maximum d'entropie . . . . .	129
8.3.1	Définition de l'entropie . . . . .	129
8.3.2	Lois à maximum d'entropie . . . . .	130
8.3.3	Lois à minimum d'entropie relative . . . . .	131
8.3.4	Extension au cas continu . . . . .	132
8.3.5	Extension au cas multivariable . . . . .	134
8.4	Utilisation pour les problèmes inverses . . . . .	136
8.4.1	Maximum d'entropie classique . . . . .	136
8.4.2	Maximum d'entropie sur la moyenne . . . . .	136
<b>9</b>	<b>Approche bayésienne</b>	<b>141</b>
9.1	Introduction . . . . .	142
9.2	Cas linéaire gaussien . . . . .	145
9.3	Calcul de la loi <i>a posteriori</i> . . . . .	147
9.3.1	Cas gaussien . . . . .	147
9.3.2	Cas général . . . . .	147

9.4	Choix des fonctions de coût . . . . .	148
9.5	Choix de la loi <i>a priori</i> . . . . .	149
9.5.1	Maximum d'entropie . . . . .	150
9.5.2	Modèles markoviens . . . . .	155
9.6	Quelques exemples de construction à la main . . . . .	156
9.7	Estimation des paramètres d'une loi à partir des observations directes . . .	163
9.7.1	Méthode des moments . . . . .	163
9.7.2	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	164
9.8	Estimation des hyperparamètres . . . . .	167
<b>10</b>	<b>Modélisation markovienne</b>	<b>169</b>
10.1	Introduction et notations . . . . .	170
10.1.1	Site, voisinage et cliques . . . . .	170
10.1.2	Champ aléatoire . . . . .	172
10.1.3	Champ aléatoire markovien . . . . .	172
10.2	Champs de Gibbs et équivalence Gibbs-Markov . . . . .	173
10.2.1	Energie et Potentiel . . . . .	173
10.2.2	Mesure de Gibbs . . . . .	173
10.2.3	Équivalence Gibbs-Markov . . . . .	173
10.3	Exemples de modèles classiques . . . . .	174
10.3.1	Auto-modèles . . . . .	174
10.3.2	Auto-logistique . . . . .	174
10.3.3	Modèle d'Ising . . . . .	174
10.3.4	Multi-Level Logistic Model (MLL) . . . . .	175
10.4	Tentative de classification . . . . .	176
10.5	Modèles couplés ou hiérarchiques . . . . .	179
10.6	Application en segmentation d'image . . . . .	180
10.7	Application en restauration d'image . . . . .	182
10.8	Outils de simulation et d'optimisation . . . . .	183
10.8.1	Echantillonneur de Gibbs . . . . .	183
10.8.2	Recuit simulé . . . . .	184
10.8.3	Algorithme d'ICM (Iterated Conditional Modes) . . . . .	184
10.9	Algorithmes de relaxations déterministes . . . . .	185
10.9.1	Principe de base du GNC . . . . .	185
10.10	Problèmes et questions ouverts . . . . .	189
<b>11</b>	<b>Choix des hyperparamètres</b>	<b>191</b>
11.1	Position du problème . . . . .	192
11.2	Choix du coefficient de régularisation . . . . .	195
11.2.1	Adéquation aux données . . . . .	196
11.2.2	Risque moyen . . . . .	197
11.2.3	Validation croisée . . . . .	198
11.2.4	Validation croisée généralisée . . . . .	199
11.3	Un autre regard . . . . .	200
11.4	Algorithme EM . . . . .	203
11.5	Exemples et exercices: . . . . .	204

<b>12 Étude de cas et exemples d'applications</b>	<b>215</b>
12.1 Déconvolution des signaux . . . . .	216
12.1.1 Un problème d'instrumentation . . . . .	216
12.1.2 Méthodes naïves . . . . .	216
12.1.3 Filtre de Wiener pour l'inversion . . . . .	219
12.1.4 Régularisation quadratique pour l'inversion . . . . .	221
12.1.5 Régularisation quadratique pour l'estimation de la réponse impul- sionnelle . . . . .	224
12.1.6 Déconvolution aveugle . . . . .	226
12.2 Restauration d'image . . . . .	231
12.3 Reconstruction d'image en tomographie X . . . . .	236
12.4 Reconstruction d'image en tomographie microondes . . . . .	237
12.5 Reconstruction d'image en CND par courant de FOUCAULT . . . . .	238
<b>A Algorithmes d'optimisation pour un critère de moindre carrés</b>	<b>241</b>
A.1 Introduction . . . . .	242
A.2 Cas des critères moindres carrés . . . . .	243
A.3 Cas des problèmes inverses avec un bruit additif . . . . .	245
A.4 Comparaison entre les méthodes . . . . .	247
<b>B Algorithme de Gauss-Seidel pour optimisation d'un critère quadratique</b>	<b>249</b>
B.1 Introduction . . . . .	250
B.2 Le cas d'un critère régularisé . . . . .	252
<b>C Expressions des différentes fonctions potentiels</b>	<b>255</b>
C.1 Potentiels convexes . . . . .	256
C.2 Potentiels non convexes . . . . .	261
<b>D Quelques exemples simples d'inférence bayésienne</b>	<b>265</b>
D.1 Introduction et rappel des notations . . . . .	266
<b>E Quelques rappels sur les matrices</b>	<b>275</b>
E.1 Introduction . . . . .	275
E.1.1 Définition . . . . .	275
E.1.2 Opérations élémentaires . . . . .	276
E.1.3 Matrices élémentaires . . . . .	277
E.1.4 Rang d'une matrice . . . . .	277
E.1.5 Matrice inverse . . . . .	278
E.1.6 Déterminant d'une matrice . . . . .	278
E.1.7 Matrice singulière . . . . .	278
E.1.8 Trace d'une matrice . . . . .	278
E.1.9 Vecteurs propres et valeurs propre d'une matrice . . . . .	279
E.1.10 Valeurs singulières d'une matrice . . . . .	280
E.1.11 Matrices et les opérations linéaires . . . . .	280
E.1.12 Décomposition tronquée en valeurs singulière . . . . .	282
E.1.13 Inverse généralisée d'une matrice . . . . .	283
E.2 Quelques matrices célèbres . . . . .	283
E.3 Matrices blocs . . . . .	293
E.4 Matrices de Toeplitz et de Hankel . . . . .	295

E.4.1	Matrices de Toeplitz . . . . .	295
E.4.2	Matrices de Hankel . . . . .	296
E.5	Matrices circulantes . . . . .	297
E.6	Matrices bloc-Toeplitz et bloc-circulantes . . . . .	299
E.6.1	Matrices bloc-Toeplitz . . . . .	299
E.6.2	Matrices bloc-circulantes . . . . .	300
E.7	Inversion récursive des matrices . . . . .	301
E.8	Résolution des systèmes d'équations linéaires . . . . .	305
E.8.1	Conditionnement d'un problème de résolution des systèmes linéaires	306
E.8.2	Conditionnement d'un problème de calcul des valeurs singulières d'une matrice . . . . .	308
E.9	Méthodes récursives de résolution des systèmes d'équations linéaires . . . .	309
E.10	Diverses propriétés . . . . .	313
<b>F</b>	<b>Quelques transformations utiles</b>	<b>315</b>
F.1	Transformations 1-D . . . . .	316
F.2	Transformations 2-D . . . . .	318
F.3	Transformations $n$ -D . . . . .	320
F.4	Transformations linéaires dans le cas discret . . . . .	321
<b>G</b>	<b>Classement bibliographique</b>	<b>327</b>

