Chapitre 7

Modèle bayésien hiérarchique

Définition 18 [Modèle bayésien hiérarchique] On appelle *modèle bayésien hiérarchique* la donnée d'un modèle bayésien, $(p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}), p(\boldsymbol{\theta}))$, où la loi *a priori* $p(\boldsymbol{\theta})$ est décomposée en distribution conditionnelles

$$\pi_1(\boldsymbol{\theta}|\theta_1), \pi_2(\theta_1|\theta_2), \cdots, \pi_n(\theta_{n-1}|\theta_n),$$

et en une distribution marginale $\pi_{n+1}(\theta_n)$. Les paramètres θ_i sont dits *hyperparamètres.*
Remarqueons qu'un modèle bayésien hiérarchique

$$x \sim p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}), \quad \theta \sim \pi_1(\theta|\theta_1),\, \theta_1 \sim \pi_2(\theta_1|\theta_2), \cdots \theta_{n-1} \sim \pi_n(\theta_{n-1}|\theta_n),\, \theta_n \sim \pi_{n+1}(\theta_n),$$

est un cas particulier de modèle bayésien usuel

$$x \sim p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}), \quad \theta \sim p(\boldsymbol{\theta}),$$

avec

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \int \pi_1(\theta|\theta_1), \cdots \pi_n(\theta_{n-1}|\theta_n),\, \pi_{n+1}(\theta_n)\, \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n.$$

Exemple 16

$$x_i \sim \mathbf{N}(x_i|\theta, 1) \longrightarrow \boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_k] \sim \mathbf{N}_k(\boldsymbol{x}|\theta\mathbf{1}, \boldsymbol{I})$$

$$\theta|z \sim \mathbf{N}(\theta|0, \tau^2 z)$$

$$z \sim \mathbf{IGam}(z|\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$$

$$\theta|\boldsymbol{x}, z \sim \mathbf{N}\left(\theta|\frac{\bar{x}}{1+\tau^2 z}, \frac{\tau^2 z}{1+\tau^2 z}\right)$$

$$\pi(z|\boldsymbol{x}) \propto (1+\tau^2 z)^{-k/2} \exp\left[-\frac{1}{2(1+\tau^2 z)}\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}\right] \pi(z)$$

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left[\theta|\boldsymbol{x}, z\right] \pi(z|\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}z = \bar{x}\frac{\displaystyle\int_0^\infty (1+\tau^2 z)^{-1} f(z|\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}z}{\displaystyle\int_0^\infty f(z|\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}z},$$

avec

$$f(z|\boldsymbol{x}) = (1+\tau^2 z)^{-k/2} \exp\left[-\frac{1}{2(1+\tau^2 z)}\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}\right] z^{-(\alpha+2)/2} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}z\right]$$