

Inférence bayésienne pour les problèmes inverses

Ali Mohammad-Djafari
Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-ESE-UPS)
École Supérieure d'Électricité
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Version provisoire du 3 septembre 1999¹

Table des matières

0	Avant-Propos	5
1	Introduction	7
1.1	Rôle de l'analyse statistique	7
1.2	Approche statistique classique	8
1.3	Approche bayésienne	9
1.4	Vraisemblance et statistique exhaustive	12
1.5	Lien entre les deux approches	14
2	Caractéristique de la loi a posteriori	17
3	Inférence bayésienne : l'approche théorie de la décision	19
3.1	Théorie de la décision et fonction coût	19
3.2	Fonction coût et estimateurs bayésiens	20
3.3	Fonctions de coûts usuelles et les estimateurs associés	21
3.3.1	Coût quadratique	21
3.3.2	Coût absolu	22
3.3.3	Coût "0-1"	22
3.3.4	Coût "Dirac"	23
3.3.5	Coût l_p	23
3.3.6	Coût Linex	24
3.3.7	Autres fonctions coût	25
3.3.8	Cas d'un vecteur de paramètres	25
3.3.9	Lien entre les estimateurs de Bayes et caractéristiques de la loi <i>a posteriori</i>	26
4	Modélisation des observations	29
4.1	Introduction	29
4.2	Notions d'indépendance	30
4.3	Notions d'interchangeabilité	31
4.4	Modélisation des variables binaires interchangeables	31
4.4.1	Modèle binomial	31
4.4.2	Modèle Multinomial	32
4.5	Modélisation des variables réelles	33
4.6	Modélisation des variables réelles via la symétrie	34
4.7	Modélisation via l'invariance d'origine et la positivité	35
4.8	Modélisation via la Statistiques suffisantes	37

5	Information a priori et lois a priori	39
5.1	Approche pragmatique : lois usuelles	39
5.2	Méthode des moments pour la détermination des paramètres	40
5.3	Principe du maximum d'entropie	41
5.4	Lois a priori non informatives	42
5.5	Principe d'invariance par transformation	44
5.6	Famille des lois conjuguées	46
5.7	Lois conjuguées et Statistiques suffisantes	46
5.8	Lois conjuguées des familles exponentielles	46
5.9	Lois a priori de référence	50
6	Estimation bayésien	53
7	Modèle bayésien hiérarchique	55
8	Calcul bayésien	57
8.1	Intégration numérique	58
8.2	Réduction de la dimension de l'intégration	59
8.3	Approximations gaussiennes	60
8.4	Méthodes de Monte-Carlo	62
8.5	Approximation de Laplace	62
8.6	Méthodes de Monte-Carlo bayésien	62
9	Exemples d'applications	63
9.1	Estimation d'un facteur de l'asymétrie	63
9.2	Segmentation d'image	66
9.3	Reconstruction d'image avec modèle markovien	69
10	Tableaux récapitulatifs	73
10.1	Inférence bayésienne	73
10.2	Lois de probabilités usuelles	96
10.2.1	Notations	96
10.2.2	Notations détaillées	101
10.2.3	Définitions	109

Chapitre 0

Avant-Propos

Le but de ce document est de présenter les bases de la théorie des probabilités et de l'inférence bayésienne à l'usage des ingénieurs et des chercheurs du domaine de la science pour l'ingénieur. Introduite par Bayes et développée par Laplace, l'approche bayésienne a une histoire particulièrement riche en polémiques et controverses. Mais l'objet de ce travail n'est pas d'intervenir dans ces polémiques. Il s'agit plutôt de mieux comprendre cette approche pour mieux l'utiliser.

Ce document ne prétend ni d'originalité au point de vue de la théorie des probabilités ni au point de vue de l'analyse statistique bayésienne. Il s'agit plutôt d'une réécriture plus compréhensive et plus simplifiée des notions essentielles qui sont nécessaires pour l'utilisation de ces techniques.

Des exemples et des tableaux récapitulatifs sont fournis pour que cet ouvrage puisse être utilisé plus aisément.

Après une introduction sur le rôle de la théorie des probabilités et de l'analyse statistique classique ou bayésienne et les principales notions de bases de cette approche, les chapitres qui suivent sont consacrés aux principales difficultés de cette approches qui sont les thèmes suivants:

- Inférence bayésienne : l'approche théorie de la décision ;
- Inférence bayésienne : l'approche directe ;
- Choix ou détermination de la loi *a priori* ;
- Choix ou détermination de la loi des observations ;
- Choix ou détermination de la fonction coût ;
- Aspects calculatoires et algorithmiques ;
- Exemples d'applications ;
- Tableaux récapitulatifs.

