

APPROCHE BAYÉSIENNE POUR LES PROBLÈMES INVERSES

Ali MOHAMMAD-DJAFARI

Laboratoire des signaux et systèmes

Supélec, Plateau de Moulon

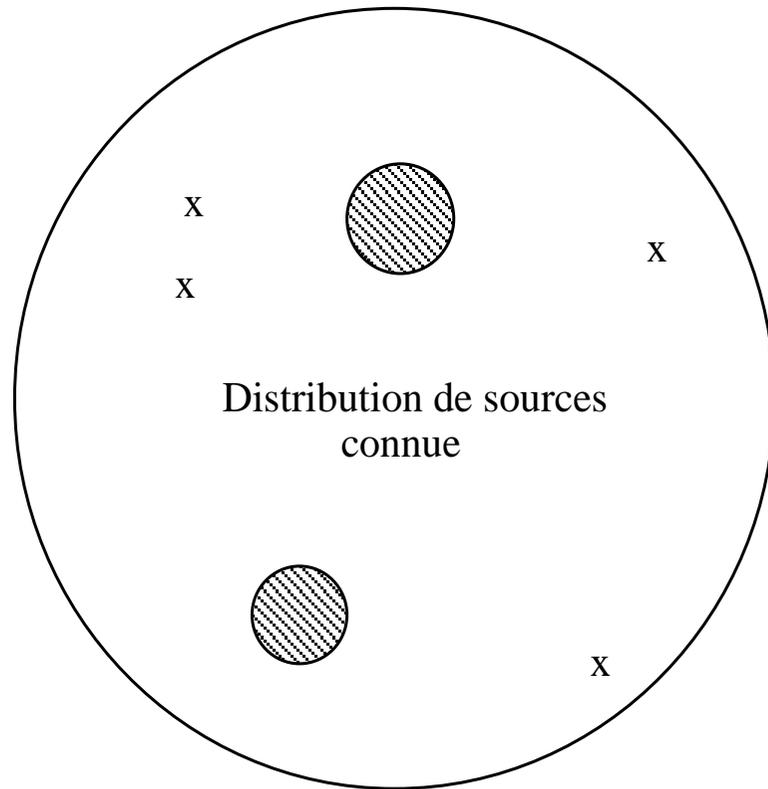
91192 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE.

djafari@lss.supelec.fr

<http://djafari.free.fr>

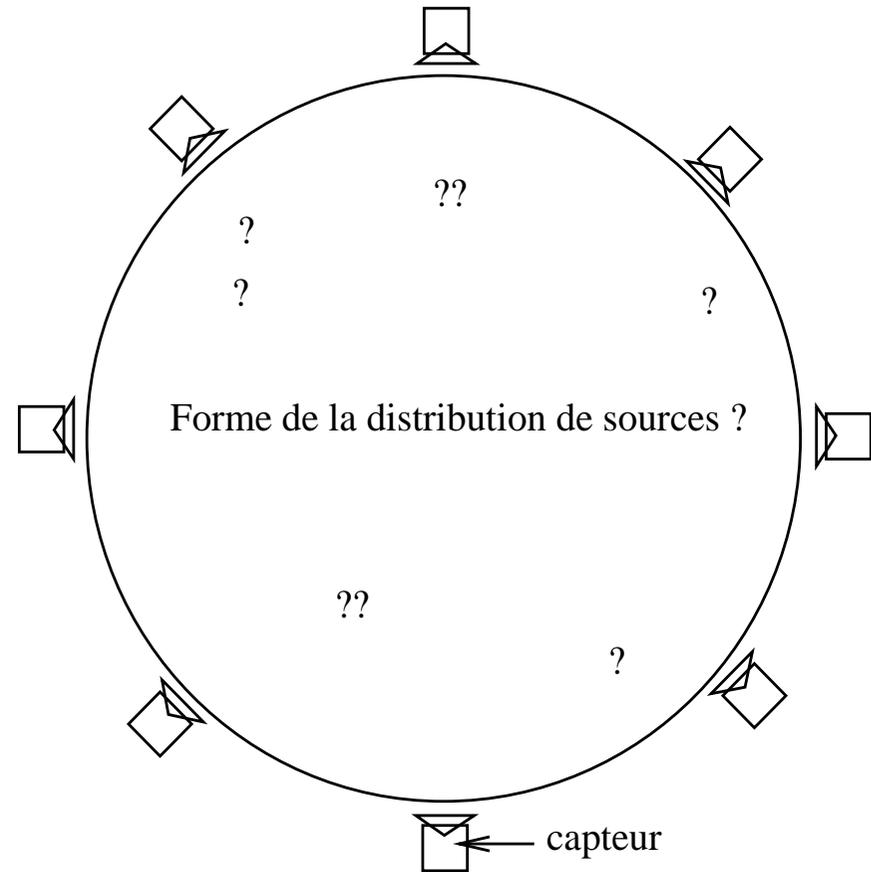
<http://www.lss.supelec.fr/perso/djafari>

PROBLÈMES INVERSES EN IMAGERIE



Valeur du champ rayonné ? (p. ex. sur une sphère)

Problème direct



Problème inverse

PROBLÈMES INVERSES : FORMALISATION

$$\mathcal{H} \left(\begin{array}{c} \mathbf{g} \\ \text{mesures} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \text{grandeurs} \\ \text{inconnues} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{z} \\ \text{grandeurs inconnues} \\ \text{intermédiaires} \end{array}, \begin{array}{c} \boldsymbol{\epsilon} \\ \text{erreurs} \\ \text{et bruit} \end{array} \right) = 0$$

Cas particuliers :

- Modèle implicite avec relation entre \mathbf{f} et \mathbf{z} :

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathcal{H}_1(\mathbf{f}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathcal{H}_2(\mathbf{f}, \mathbf{z}) = 0 \end{cases}$$
- Modèle non linéaire simple :

$$\mathbf{g} = \mathcal{H}(\mathbf{f}) + \boldsymbol{\epsilon}$$
- Modèle linéaire + bruit additif :

$$\mathbf{g} = \mathcal{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}$$

SUIVIE DE FRONT DE FUSION LIQUIDE-SOLIDE

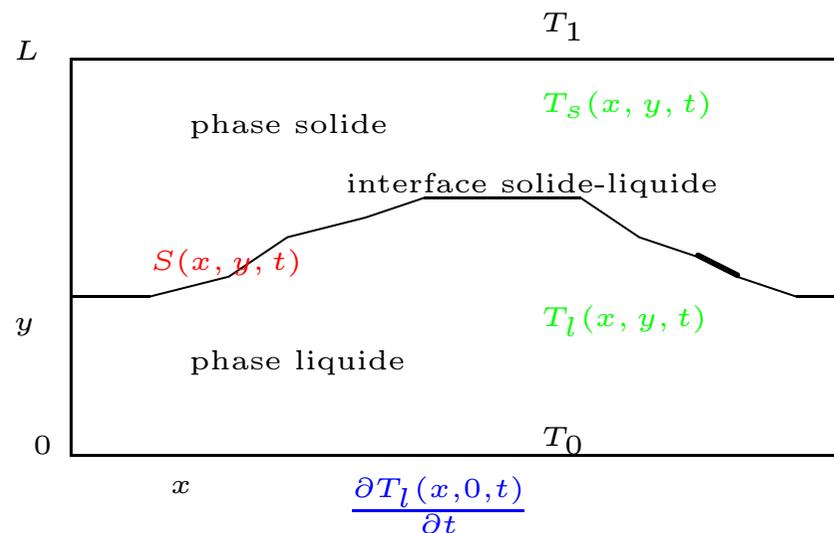
Solide : $\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right)$

Liquide : $\frac{\partial T_l}{\partial t} = \alpha_l \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right)$

Bilan d'énergie
à l'interface : $k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial n} = \rho L_f \vec{v} \cdot \vec{n}$

\vec{v} : vitesse de l'interface solide-liquide

\vec{n} : vecteur normal à l'interface



Mesures : flux de chaleur sur la paroi chaude $\frac{\partial T_s(x, 0, t)}{\partial t}$

Inconnue : position de l'interface $S(x, y, t)$

Grandeurs
intermédiaire : champs de température $T_s(x, y, t)$ et $T_l(x, y, t)$

IMAGERIE À ONDES DIFFRACTÉES

Mesures : champ diffracté par objet $\phi_d(\mathbf{r}_i)$

Grandeur inconnue : $f(\mathbf{r}) = k_0^2(n^2(\mathbf{r}) - 1)$

Grandeurs intermédiaires : $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi_d(\mathbf{r}_i) = \iint_D G_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_i \in S$$

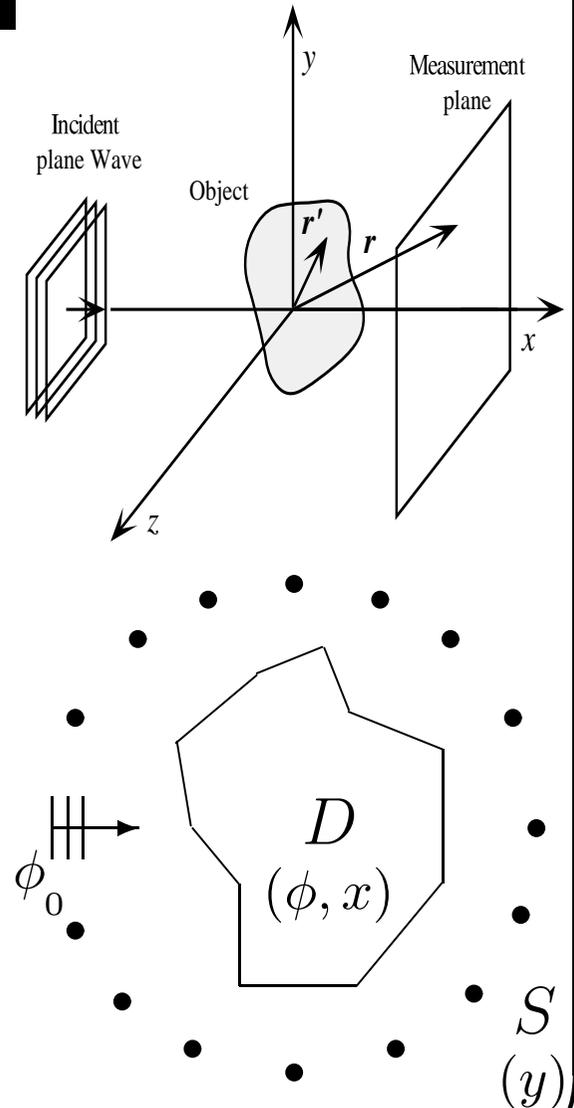
$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \iint_D G_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in D$$

Approximation de Born ($\phi(\mathbf{r}') \simeq \phi_0(\mathbf{r}')$) :

$$\phi_d(\mathbf{r}_i) = \iint_D G_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_i \in S$$

Discrétisation : notations: $\mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{f})$ et $\mathbf{\Phi} = \text{diag}\{\phi\}$

$$\begin{cases} \phi_d = \mathbf{G}_M \mathbf{F} \phi = \mathbf{G}_M \mathbf{\Phi} \mathbf{f} \\ \phi = \phi_0 + \mathbf{G}_O \mathbf{F} \phi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \phi_d = \mathbf{h}(\mathbf{f}) \text{ avec} \\ \mathbf{h}(\mathbf{f}) = \mathbf{G}_M \mathbf{F} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \phi_0 \end{cases}$$



PROBLÈMES INVERSES LINÉAIRES

$$g(\mathbf{s}_i) = \int f(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) d\mathbf{r} + \epsilon(\mathbf{s}_i), \quad i = 1, \dots, M$$

- Débruitage & Interpolation: $g(\mathbf{r}_i) = f(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}_i)$

- Déconvolution: $g(\mathbf{r}_i) = \int f(\mathbf{r}') h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \epsilon(\mathbf{r}_i)$

- Restauration d'image :

$$g(x_i, y_j) = \iint f(x', y') h(x_i - x', y_j - y') dx' dy' + \epsilon(x_i, y_j)$$

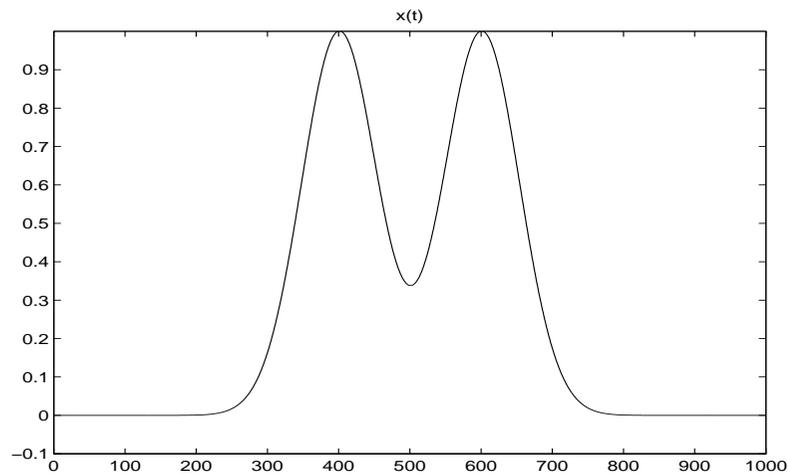
- Reconstruction d'image :

$$g(r_i, \phi_j) = \iint f(x, y) \delta(r_i - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy + \epsilon(r_i, \phi_j)$$

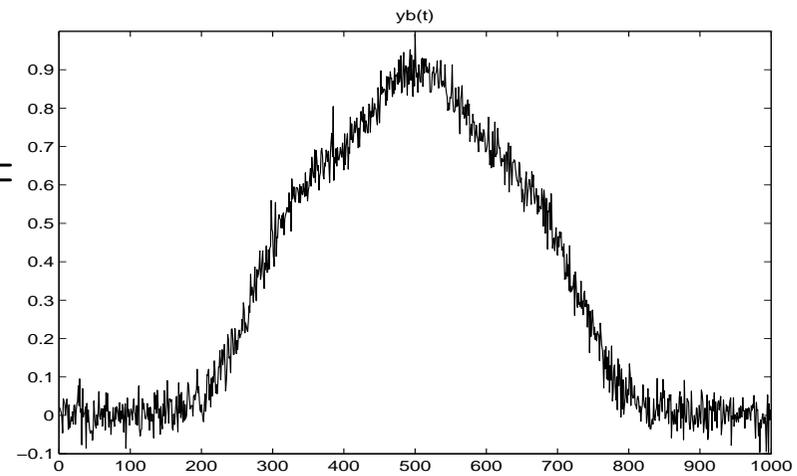
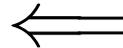
- Synthèse de Fourier :

$$g(\Omega_i, \phi_j) = \iint f(x, y) \exp [j(x\Omega_i \cos \phi_j + y\Omega_i \sin \phi_j)] dx dy + \epsilon(\Omega_i, \phi_j)$$

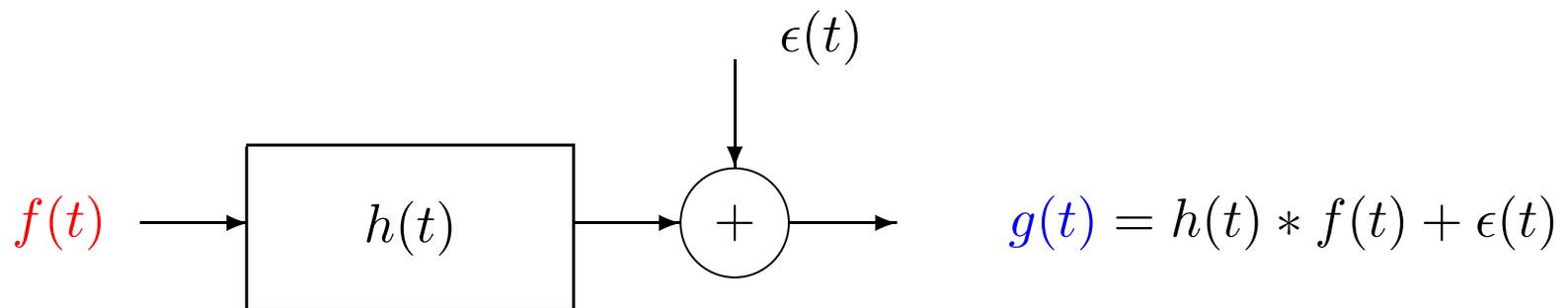
RADIO-ASTRONOMIE



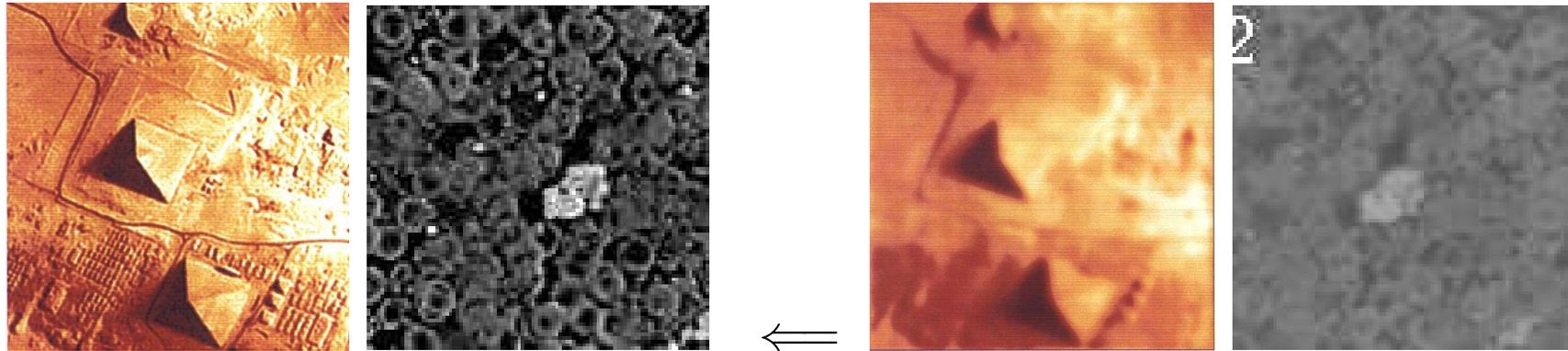
?



Modèle d'observation

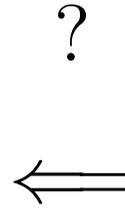


IMAGERIE SATELLITAIRE, MICROSCOPIE, ...

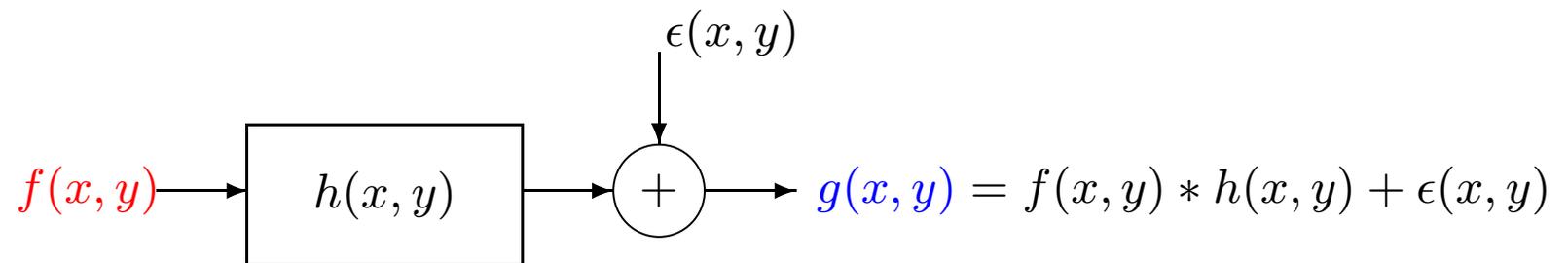


- Le procédé de la formation d'image n'est pas parfait.
- Les capteurs CCD introduisent un flou.
- Souvent l'ensemble du système de mesure peut être modélisé par une convolution bivariable.
- **Problème direct** : $f(x, y), h(x, y) \longrightarrow g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$
- Deux problèmes inverses liés :
 - **Inversion** : $g(x, y), h(x, y) \longrightarrow f(x, y)$
 - **Identification** : $g(x, y), f(x, y) \longrightarrow h(x, y)$

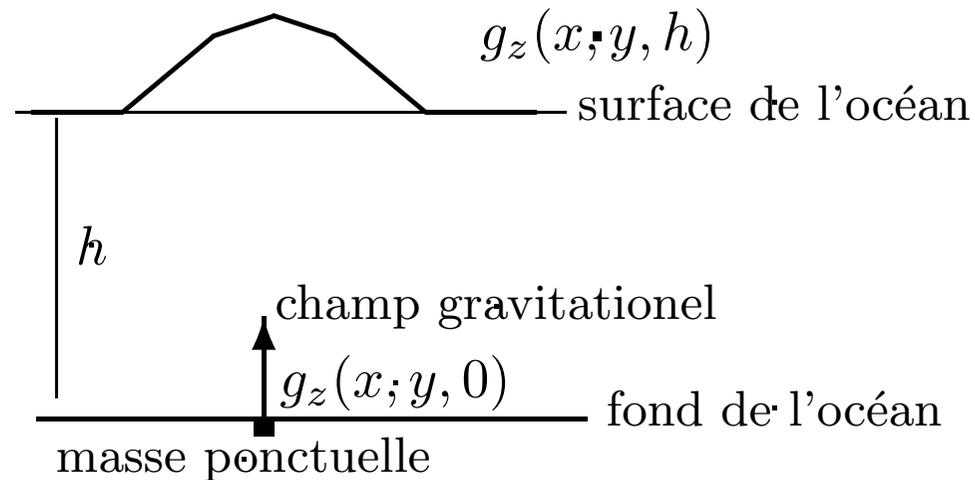
RESTAURATION D'IMAGE



Modèle d'observation



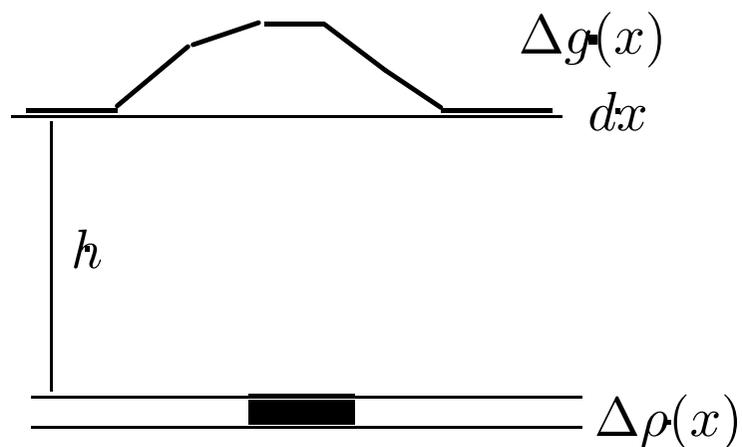
IMAGERIE EN GÉOPHYSIQUES



$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} g_x(\mathbf{r}) \\ g_y(\mathbf{r}) \\ g_z(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \frac{-MG\bar{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|^2} = \frac{-M\gamma(\bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{y} + \bar{z}\bar{z})}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

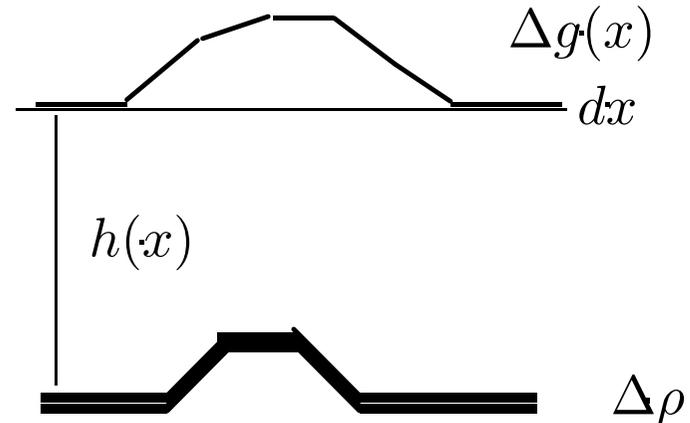
$$g_z(x, y, h) = \iint \frac{h g_z(s_1 - x, s_2 - y, 0)}{2\pi((s_1 - x)^2 + (s_2 - y)^2 + h^2)^{3/2}} ds_1 ds_2$$

IMAGERIE EN GÉOPHYSIQUES



$$\Delta g(s) = \int \frac{h \Delta \rho(x)}{[(x-s)^2 + h^2]^{3/2}} dx$$

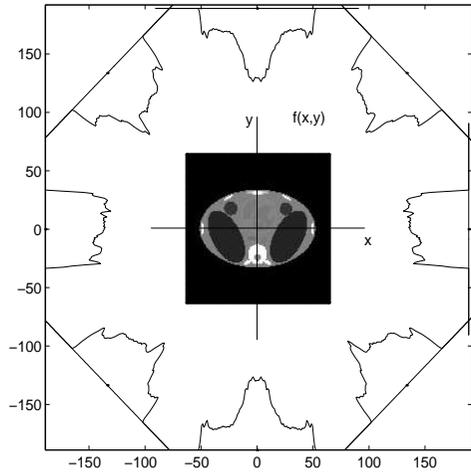
problème linéaire



$$\Delta g(s) = \int \frac{h(x) \Delta \rho}{[(x-s)^2 + h(x)^2]^{3/2}} dx$$

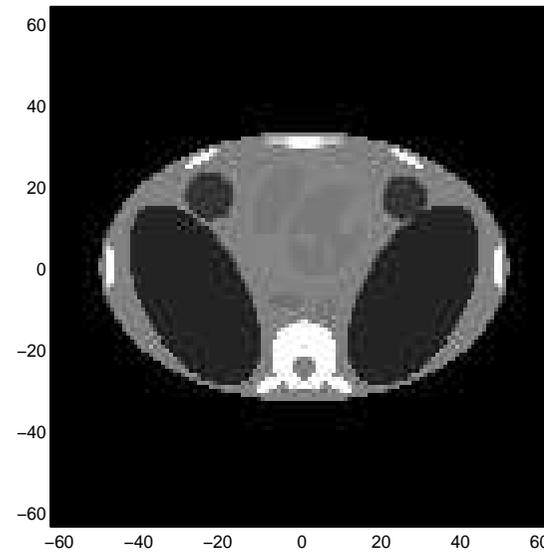
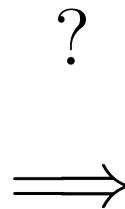
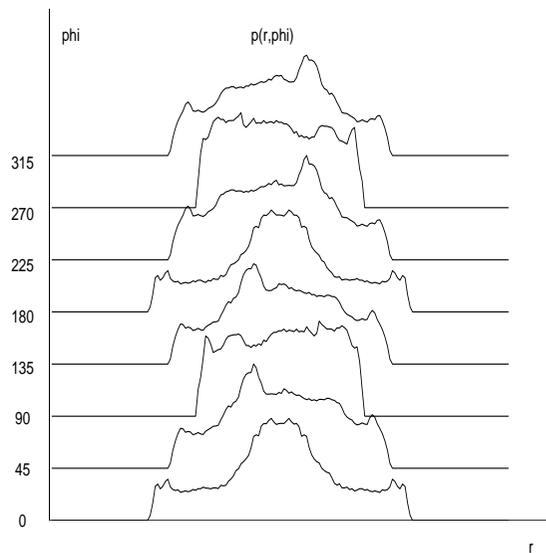
problème non linéaire

RECONSTRUCTION D'IMAGE EN TOMOGRAPHIE X



$$p(r, \phi) = \int_{L_{r, \phi}} f(x, y) dl$$

$$p(r, \phi) = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$

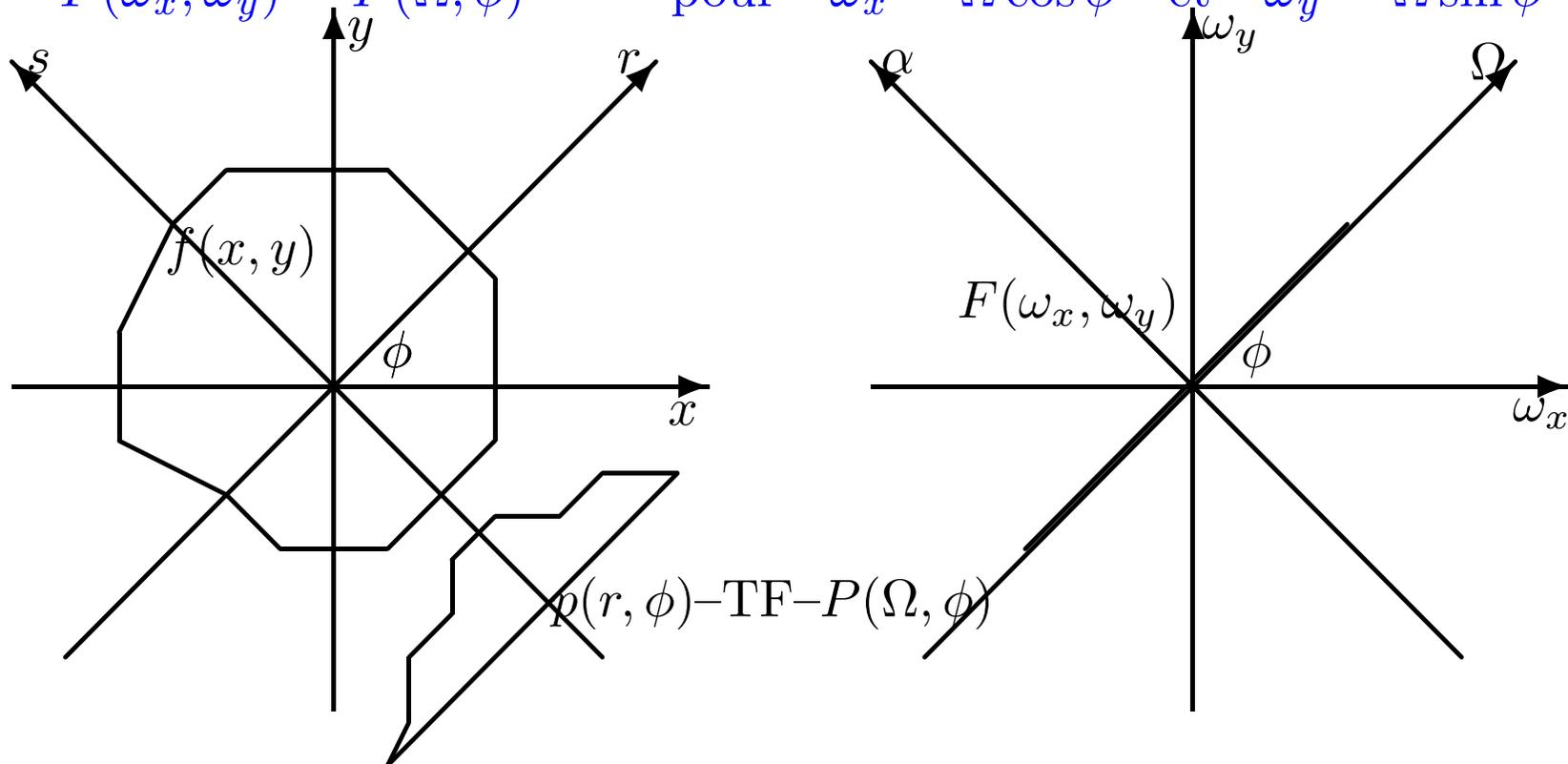


SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE X

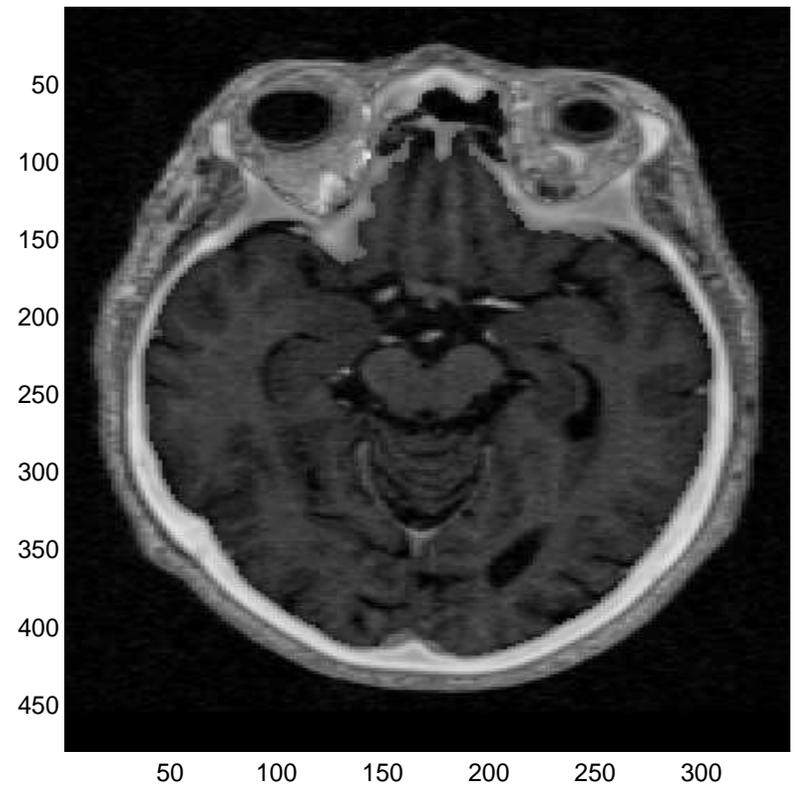
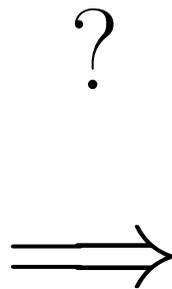
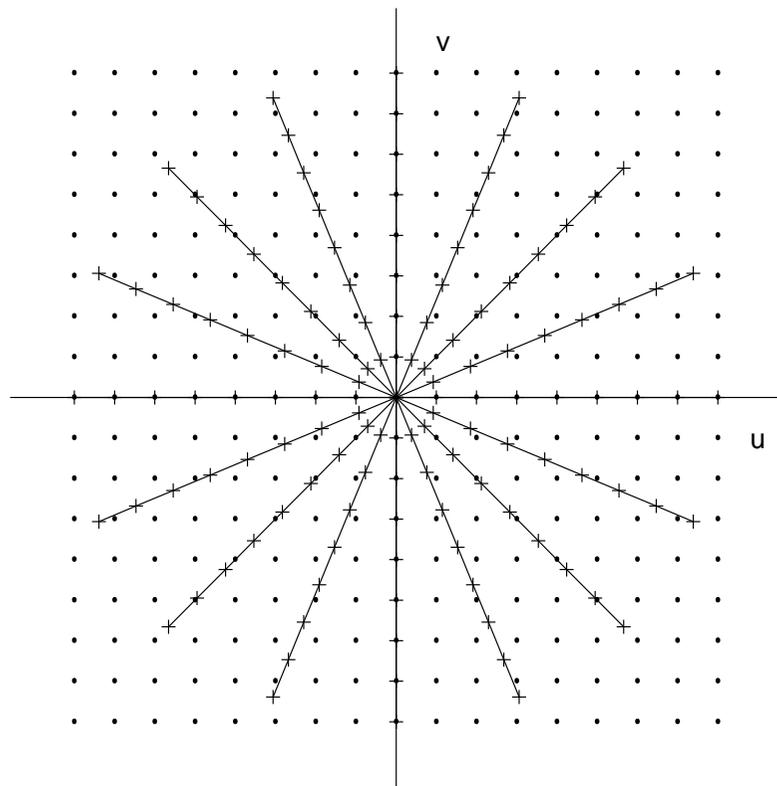
$$P(\Omega, \phi) = \int p(r, \phi) \exp[-j\Omega r] dr$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) \exp[-j\omega_x x, \omega_y y] dx dy$$

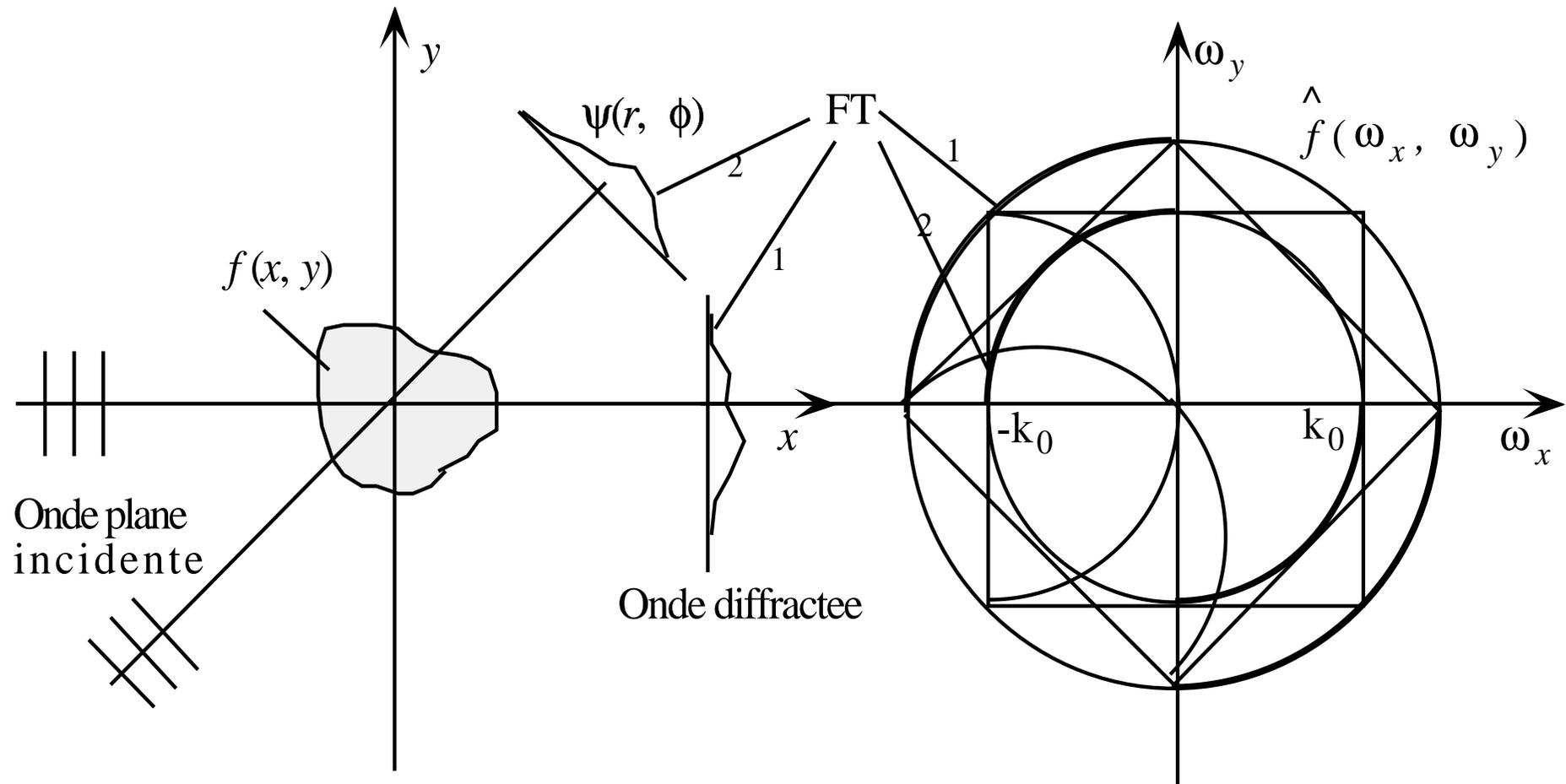
$$F(\omega_x, \omega_y) = P(\Omega, \phi) \quad \text{pour} \quad \omega_x = \Omega \cos \phi \quad \text{et} \quad \omega_y = \Omega \sin \phi$$



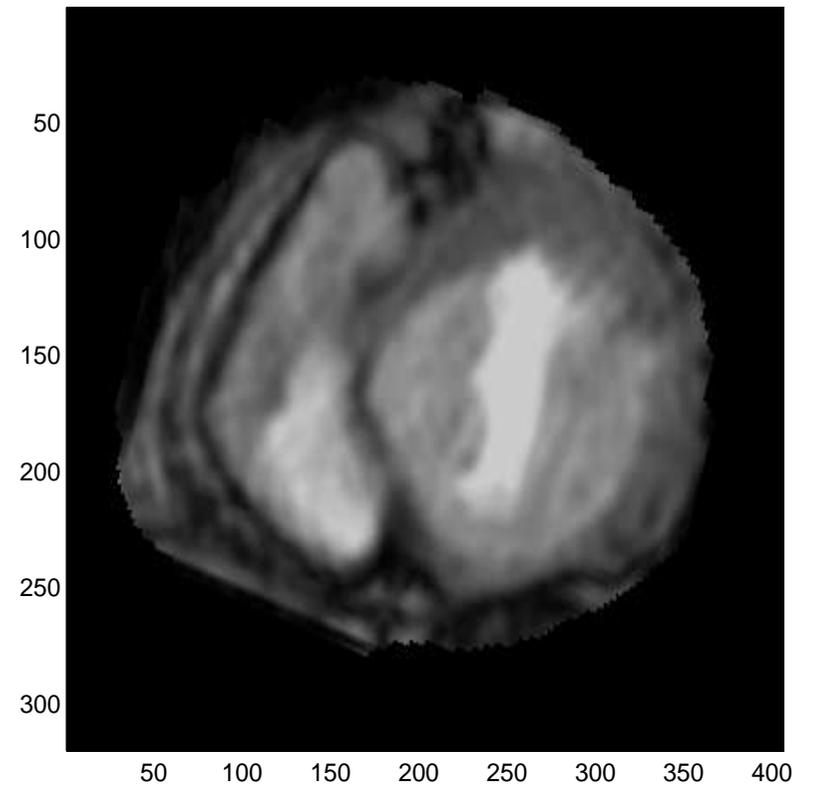
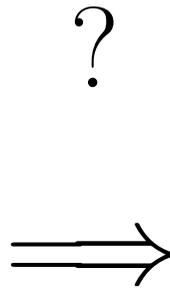
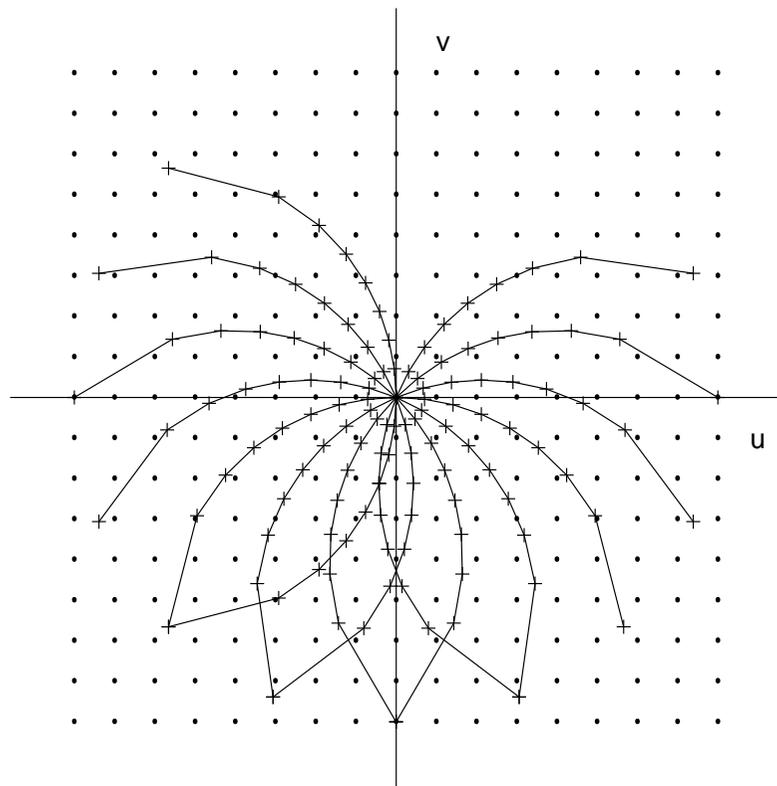
SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE X



SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE À ONDES DIFFRACTÉES



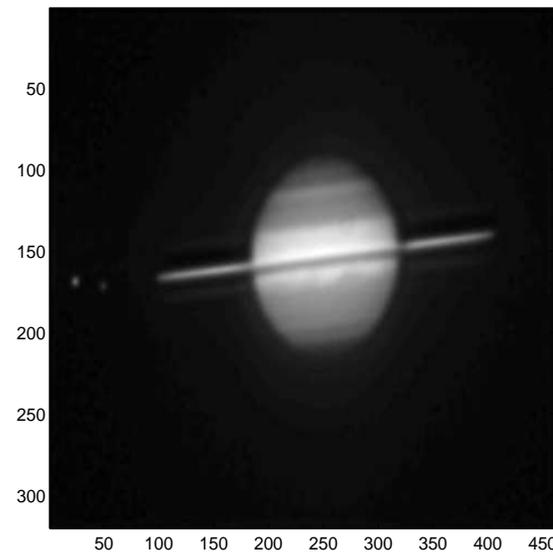
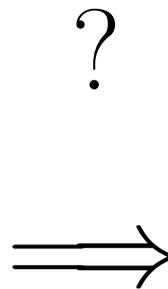
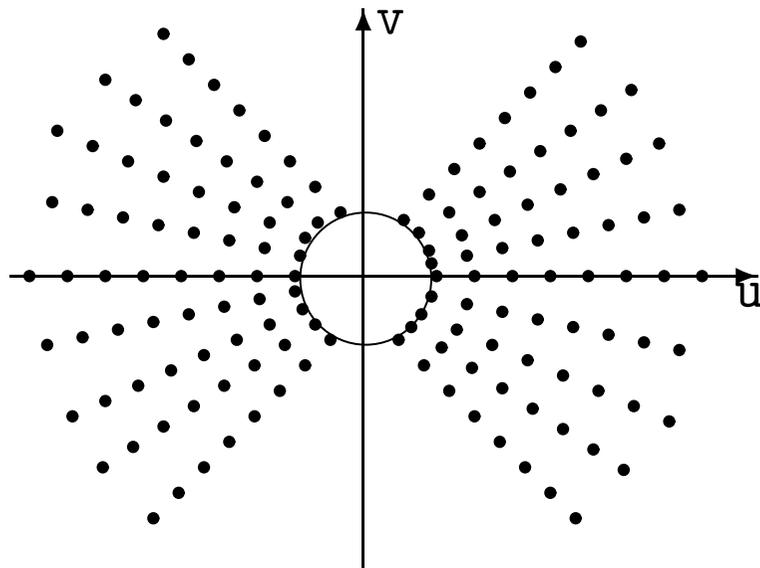
SYNTHÈSE DE FOURIER EN TOMOGRAPHIE À ONDES DIFFRACTÉES



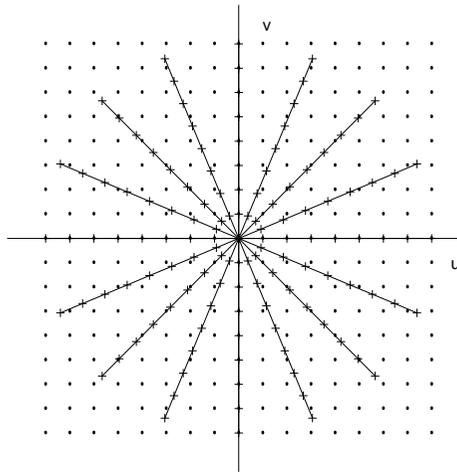
SYNTHÈSE DE FOURIER EN RADIOASTRONOMIE

$$g(u, v) = \iint_D f(x, y) \exp[-j(ux + vy)] dx dy + b(u, v),$$

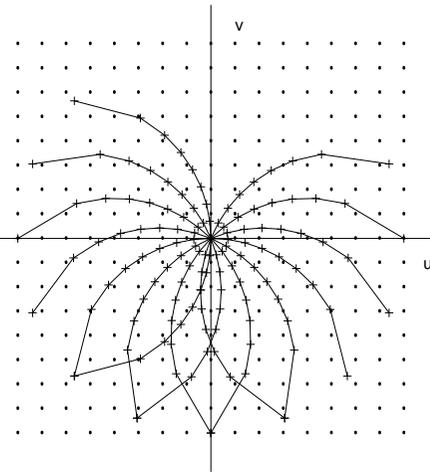
Données interférométriques: $|g(u_i, v_i)|^2$
La phase est manquante



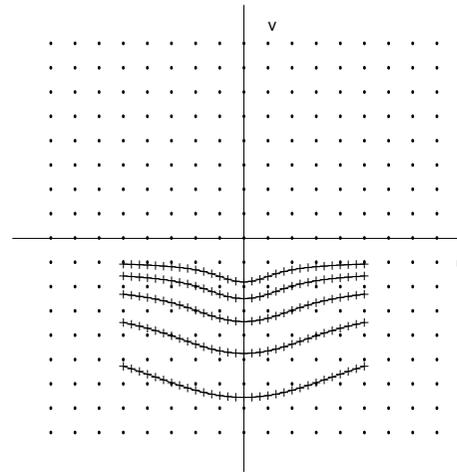
SYNTHÈSE DE FOURIER DANS DIFFÉRENTES APPLICATIONS



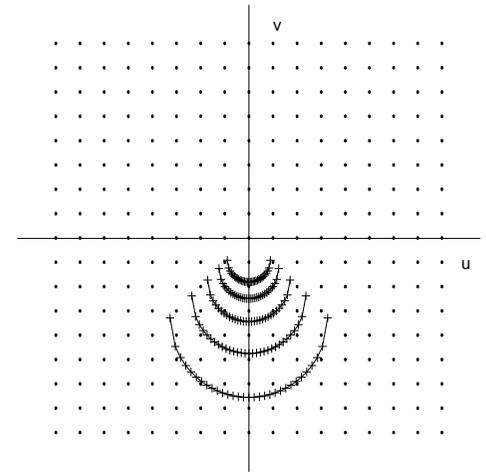
Tomographie X



Diffraction



Courants de Foucault



SAR et Radar

$$g(\Omega_i, \phi_j) = \iint f(x, y) \exp [j(xT_1(\Omega_i, \cos \phi_j) + yT_2(\Omega_i, \sin \phi_j))] dx dy + \epsilon(\Omega_i, \phi_j)$$

CLASSIFICATION DES MÉTHODES D'INVERSION

Méthodes analytiques

On se place dans le cadre de mesures **continues** et en utilisant la notion d'opérateur adjoint on cherche une solution **analytique** qui est ensuite **approximée** lors du calcul **numérique**

$$g(\mathbf{s}) = \int h(\mathbf{s}, \mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \epsilon(\mathbf{s})$$

- Inversion directe

$$f(\mathbf{r}) = \int h^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}) g(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \simeq \sum_i w_i g(\mathbf{s}_i) h^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)$$

- Inversion dans l'espace dual

$$G(\mathbf{u}) = \int g(\mathbf{s}) \exp[-j\mathbf{u}^t \mathbf{s}] d\mathbf{s}$$

$$F(\mathbf{v}) = \int f(\mathbf{r}) \exp[-j\mathbf{u}^t \mathbf{r}] d\mathbf{r}$$

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int h(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \exp[-j(\mathbf{v}^t \mathbf{r} + \mathbf{u}^t \mathbf{s})] d\mathbf{r} d\mathbf{s}$$

$$G(\mathbf{u}) = \int H(-\mathbf{v}, \mathbf{u}) F(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) \int H(-\mathbf{v}, \mathbf{u}) d\mathbf{v}$$

EXEMPLE: RECONSTRUCTION D'IMAGE ET LA TRANSFORMÉE DE RADON

$$p(r, \phi) = \iint_D f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy$$

Inversion directe :

$$f(x, y) = \left(-\frac{1}{2\pi^2} \right) \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial r} p(r, \phi)}{(r - x \cos \phi - y \sin \phi)} dr d\phi$$

Inversion dans le domaine de Fourier :

$$F(\omega_x, \omega_y) = P(\Omega, \phi), \quad \omega_x = \Omega \cos \phi, \omega_y = \Omega \sin \phi$$

Limitations :

- Méthodes limitées aux cas de modèles simples
- Bruit non pris en compte
- Nécessite un ensemble complet de données non bruitées

MÉTHODES ALGÈBRIQUES DÉTERMINISTES

$$g(\mathbf{s}_i) = \int f(\mathbf{r})h(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) d\mathbf{r} \quad \longrightarrow \text{discrétisation} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \epsilon$$

- Rétrojection ou filtre adapté : $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^t \mathbf{g}$, mais $\mathbf{H}^t \mathbf{H} \neq \mathbf{I}$
- Inversion directe lorsque possible: $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}$
- Inverse généralisée:
 - $M > N$ et $\text{rang}\{A\} = N \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{g}$
 - $M < N$ et $\text{rang}\{A\} = M \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^t (\mathbf{H} \mathbf{H}^t)^{-1} \mathbf{g}$
 - Décomposition en valeurs singulières : $\hat{\mathbf{f}} = \sum_{k=1}^r \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{g} \rangle}{\lambda_k} \mathbf{v}_k$
- Restriction de l'espace des solutions :

$\min \Omega(\mathbf{f})$ s.c. $\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}$, avec, par exemple

$$\Omega(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^n f_j^2, \quad \Omega(\mathbf{f}) = - \sum_{j=1}^n f_j \log f_j, \quad \Omega(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^n \log f_j, \quad \dots$$

MÉTHODES D'INVERSION ALGÈBRIQUE

Ingrédients de base :

- Un modèle directe :
$$\begin{cases} \text{Non linéaire: } g_i = h_i(\mathbf{f}) + \epsilon_i \longrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{h}(\mathbf{f}) + \epsilon \\ \text{Linéaire: } h_i = \sum_j H_{i,j} f_j \longrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \epsilon \end{cases}$$
- Une mesure d'adéquation aux données : $Q(\mathbf{g}, \mathbf{h}(\mathbf{f}))$
- Une paramétrisation $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ ou une fonctionnelle de régularisation $\Omega(\mathbf{f})$

Méthodes d'inversion standard :

- Estimation paramétrique : $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \{Q(\mathbf{g}, \mathbf{h}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))\|^2\}$
- Optimisation sous contraintes :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{\Omega(\mathbf{f})\} \quad \text{sous contrainte } \mathbf{g} = \mathbf{h}(\mathbf{f}) \quad \text{ou} \quad Q(\mathbf{g}, \mathbf{h}(\mathbf{f})) < \epsilon$$

- Critère régularisé : $\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{Q(\mathbf{g}, \mathbf{h}(\mathbf{f})) + \lambda\Omega(\mathbf{f})\}$

Différentes solutions algébriques classiques

- Filtre adapté ou rétroprojection : $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^t \mathbf{g}$ mais $\mathbf{H}^t \mathbf{H} \neq \mathbf{I}$
- Inversion directe: $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}$ mais \mathbf{H} souvent singulière ou mal-conditionnée
- Inversion avec contrainte de norme minimale:

$$\min \|\mathbf{f}\|^2 \text{ sous les contraintes } \mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^t [\mathbf{H} \mathbf{H}^t]^{-1} \mathbf{g}$$

- Inversion avec autres contraintes (Maximum Entropie):

$$\max - \sum_j f_j \ln f_j \text{ sous les contraintes } \mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{f} \longrightarrow \hat{f}_j = \exp [-[\mathbf{H}^t \boldsymbol{\lambda}]_j]$$

- Inversion au sens des MC :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{\|\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{f}\|^2\} \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{H}^t \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{g}$$

- Régularisation quadratique :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{\|\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{f}\|^2 + \lambda \|\mathbf{D} \mathbf{f}\|^2\} \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{g}$$

MÉTHODES PROBABILISTES

On se place dans le cadre de l'estimation :

- Maximum de vraisemblance (MV)
- Maximum d'entropie (ME)
- Maximum d'entropie sur la moyenne (MEM)
- Estimation bayésienne (EB)

Avantages :

- Prise en compte de la nature du bruit et l'incertitude du modèle
- Prise en compte d'information *a priori* sur la solution
- Cadre cohérent permettant aussi la détermination des hyperparamètres, marginalisation des paramètres de nuisance, ...

Limitations : Mise en œuvre parfois plus difficile en pratique

MÉTHODES PROBABILISTES

Maximum de vraisemblance (MV)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle d'observation : } \mathbf{g} = \mathbf{h}(\mathbf{f}) + \boldsymbol{\epsilon} \\ \text{Caractéristiques du bruit : } p_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{array} \right. \longrightarrow V(\mathbf{f}) = p(\mathbf{g}|\mathbf{f})$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{g}|\mathbf{f})\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{-\ln p(\mathbf{g}|\mathbf{f})\}$$

- Cas linéaire gaussien : \longrightarrow Moindres Carrés
- Méthode rarement satisfaisante pour les problèmes inverses, car souvent $V(\mathbf{f})$ est plat pour un large domaine de valeurs de \mathbf{f} (dû au mauvais conditionnement) ou parfois non bornée
- Maximum de vraisemblance pénalisée

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{-\ln p(\mathbf{g}|\mathbf{f}) + \Phi(\mathbf{f})\}$$

Maximum d'entropie classique (ME)

$$\text{maximiser } \Omega(\mathbf{f}) = - \sum_j \left[f_j \ln \frac{f_j}{m_j} + (f_j - m_j) \right] \quad \text{s.c. } \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f} = 0$$

Lagrangien : $\mathcal{L}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \Omega(\mathbf{f}) - \sum_i \lambda_i (g_i - [\mathbf{H}\mathbf{f}]_i)$

Solution :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_j} = 0 \longrightarrow f_j = m_j \exp \left[-\lambda_0 - [\mathbf{H}^t \boldsymbol{\lambda}]_j \right]$$

Les variables duales (paramètres de Lagrange) sont solution de :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0 \longrightarrow \Omega_j \left(- \sum_j a_{ij} m_j \exp \left[-\lambda_0 - [\mathbf{H}^t \boldsymbol{\lambda}]_j \right] \right) = 0$$

Prise en compte du bruit :

$$\max \Omega(\mathbf{f}) \quad \text{s.c. } \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 \leq c \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \Omega(\mathbf{f}) \}$$

Difficulté : choix de λ

APPROCHE BAYÉSIENNE DE L'ESTIMATION

- Modèle d'observation et caractéristiques du bruit : $\longrightarrow p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}_1)$
- Information *a priori* sur \mathbf{f} : $\longrightarrow p(\mathbf{f}|\boldsymbol{\theta}_2)$
- Bayes : $\longrightarrow p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}_1) p(\mathbf{f}|\boldsymbol{\theta}_2)}{p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\theta})}$ avec $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$
- Règle d'estimation : $\longrightarrow \hat{\mathbf{f}}$

Exemple : *Maximum A Posteriori* (MAP) :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{-\ln p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta})\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{-\ln p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}_1) - \ln p(\mathbf{f}|\boldsymbol{\theta}_2)\}$$

Cadre général: fonction coût $c(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}})$

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \int c(\mathbf{f}, \mathbf{z}) p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{f} \right\}$$

Estimateurs ponctuels :

- Maximum *a posteriori* (MAP) :

$$C(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}) = 1 - \delta(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}) \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta})\}$$

- Moyenne *a posteriori* (MP) :

$$C(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}) = [\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}]^t \mathbf{Q} [\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}]^t \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbb{E}_{\mathbf{f}|\mathbf{g}} \{\mathbf{f}\} = \int \mathbf{f} p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{f}$$

- MAP Marginale (MAPM) :

$$C(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}) = \prod_j 1 - \delta(f_j - \hat{f}_j) \longrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{f_j} \{p(f_j|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta})\},$$

où

$$p(f_j|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) = \int p_{\mathbf{f}|\mathbf{g}}(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) df_1 \cdots df_{j-1} \cdots df_{j+1} \cdots df_n$$

CAS LINÉAIRE GAUSSIEN

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- Hypothèse sur le bruit : $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}) \longrightarrow \mathbf{g}|\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{f}, \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I})$

$$p(\mathbf{g}|\mathbf{f}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 \right]$$

- Hypothèse gaussienne sur \mathbf{f} : $\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}_0, \sigma_f^2 \mathbf{P}_0)$:

$$p(\mathbf{f}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_f^2} [\mathbf{f} - \mathbf{f}_0]^t \mathbf{P}_0^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{f}_0] \right]$$

- loi a posteriori

$$p(\mathbf{f}|\mathbf{g}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 - \frac{1}{2\sigma_f^2} [\mathbf{f} - \mathbf{f}_0]^t \mathbf{P}_0^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{f}_0] \right]$$

- La solution au sens du MAP :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{g})\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{J(\mathbf{f})\}$$

avec

$$J(\mathbf{f}) = Q(\mathbf{f}) + \lambda\Omega(\mathbf{f}),$$

$$Q(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2, \quad \Omega(\mathbf{f}) = (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^t \mathbf{P}_0^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0), \quad \lambda = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_f^2}$$

- Lien avec la régularisation

$$\mathbf{P}_0^{-1} = \mathbf{D}^t \mathbf{D} \quad \longrightarrow \quad J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \|\mathbf{D}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\|^2$$

- Avantage : caractéristique de la solution

$$\mathbf{f}|\mathbf{g} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{P}})$$

avec

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{H}^t(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_0), \quad \hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{H}^t\mathbf{H} + \lambda\mathbf{D}^t\mathbf{D})^{-1}$$

Cadre général de l'estimé MAP :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{J(\mathbf{f})\} \quad \text{avec} \quad J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{f})$$

- Hypothèse Gaussienne sur \mathbf{f} :

$$p(f_j) \propto \exp[-\alpha(f_j - m_j)^2] \longrightarrow \Omega(\mathbf{f}) = \alpha \sum_j (f_j - m_j)^2$$

- Hypothèse Gamma sur \mathbf{f} :

$$p(f_j) \propto (f_j/m_j)^\alpha \exp[-f_j/m_j] \longrightarrow \Omega(\mathbf{f}) = \alpha \sum_j \ln \frac{f_j}{m_j} + \frac{f_j}{m_j},$$

- Hypothèse Béta sur \mathbf{f} :

$$p(f_j) \propto f_j^\alpha (1 - f_j)^\beta \longrightarrow \Omega(\mathbf{f}) = \alpha \sum_j \ln f_j + \beta \sum_j \ln(1 - f_j),$$

- Hypothèse gaussienne généralisée sur \mathbf{f} :

$$p(f_j) \propto \exp[-\alpha|f_j - m_j|^p], \quad 1 < p < 2 \longrightarrow \Phi(\mathbf{f}) = \alpha \sum_j |f_j - m_j|^p,$$

- Modèles markoviens pour \mathbf{f} :

$$p(f_j|\mathbf{f}) \propto \exp \left[-\alpha \sum_{i \in N_j} \phi(f_j, f_i) \right] \longrightarrow \Phi(\mathbf{f}) = \alpha \sum_j \sum_{i \in N_j} \phi(f_j, f_i),$$

Estimation au sens du MAP ou régularisation:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{J(\mathbf{f})\} \quad \text{avec} \quad J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f})\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{f})$$

- Lois gaussiennes: $\Omega(\mathbf{f})$ quadratique
 $\longrightarrow J(\mathbf{f})$ quadratique $\longrightarrow \hat{\mathbf{f}}$ fonction linéaire de \mathbf{g} \longrightarrow Algorithmes rapides

- Lois non gaussiens mais $\Omega(\mathbf{f})$ convexe:

Exemples: $\Omega(\mathbf{f}) = \sum_j \phi(f_j)$ ou $\Omega(\mathbf{f}) = \sum_j \phi(f_j - f_{j-1})$

avec $\phi(t) = \{|t|^p, (|t| \ln |t| - |t|), (\ln(1 + |t|))\}$

$\longrightarrow J(\mathbf{f})$ convexe \longrightarrow Estimation nonlinéaire mais facile à calculer

- Lois non gaussiens et $\Omega(\mathbf{f}) = \sum_j \Omega(f_j - f_{j-1})$ non strictement convexe:

Exemples:

$$\Omega(t) = \begin{cases} |t|^2 & \text{if } |t| < \alpha, \\ \alpha^2 & \text{else,} \end{cases}, \begin{cases} t^2 & \text{if } |t| < \alpha, \\ 2\alpha t - \alpha^2 & \text{else,} \end{cases}, \frac{\alpha^2 t^2}{1+t^2}, \log \cosh(t/\alpha)$$

$\longrightarrow J(\mathbf{f})$ non convexe \longrightarrow Minima locaux \longrightarrow Optimisation globale

IMAGERIE À ONDES DIFFRACTÉES

Mesures : champ diffracté par objet $\phi_d(\mathbf{r}_i)$

Grandeur inconnue : $f(\mathbf{r}) = k_0^2(n^2(\mathbf{r}) - 1)$

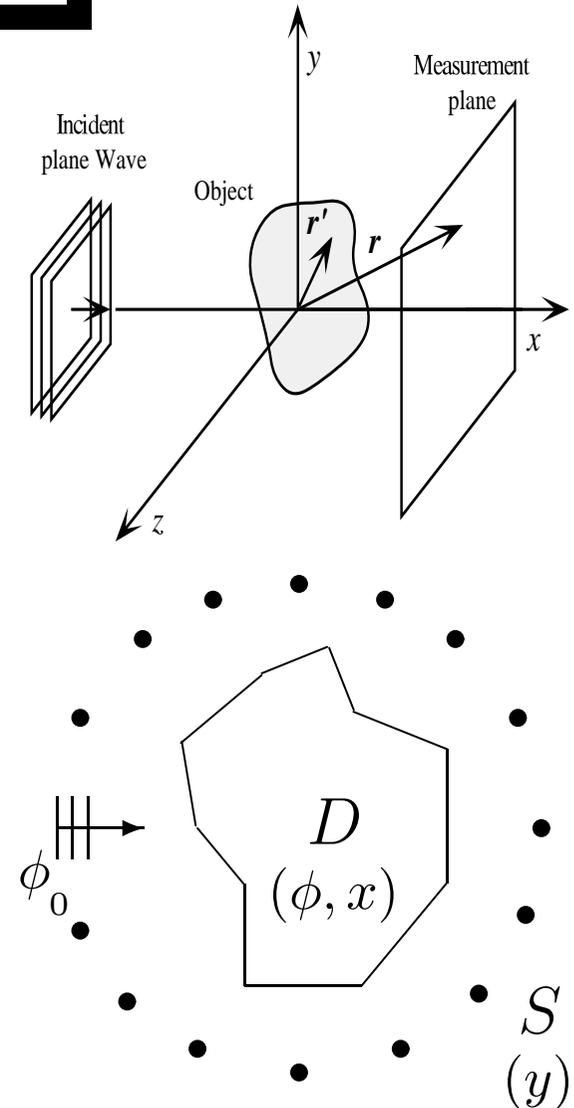
Modèle non linéaire:

$$\begin{cases} \phi_d(\mathbf{r}_i) = \iint_D G_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', & \mathbf{r}_i \in S \\ \phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \iint_D G_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', & \mathbf{r} \in D \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_d = \mathbf{G}_M \mathbf{F} \phi \\ \phi = \phi_0 + \mathbf{G}_O \mathbf{F} \phi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \phi_d = \mathbf{h}(\mathbf{f}) \text{ avec } \mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{f}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{f}) = \mathbf{G}_M \mathbf{F} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \phi_0 \end{cases}$$

Approximation linéaire:

$$\begin{cases} \phi_d(\mathbf{r}_i) = \iint_D G_m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \phi_0(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', & \mathbf{r}_i \in S \\ \phi_d = \mathbf{G}_M \mathbf{F} \phi_0 = \mathbf{G}_M \Phi_0 \mathbf{f} & \text{avec } \Phi_0 = \text{diag}(\phi_0) \end{cases}$$



NON CONVEXITÉ GRADUELLE (GNC)

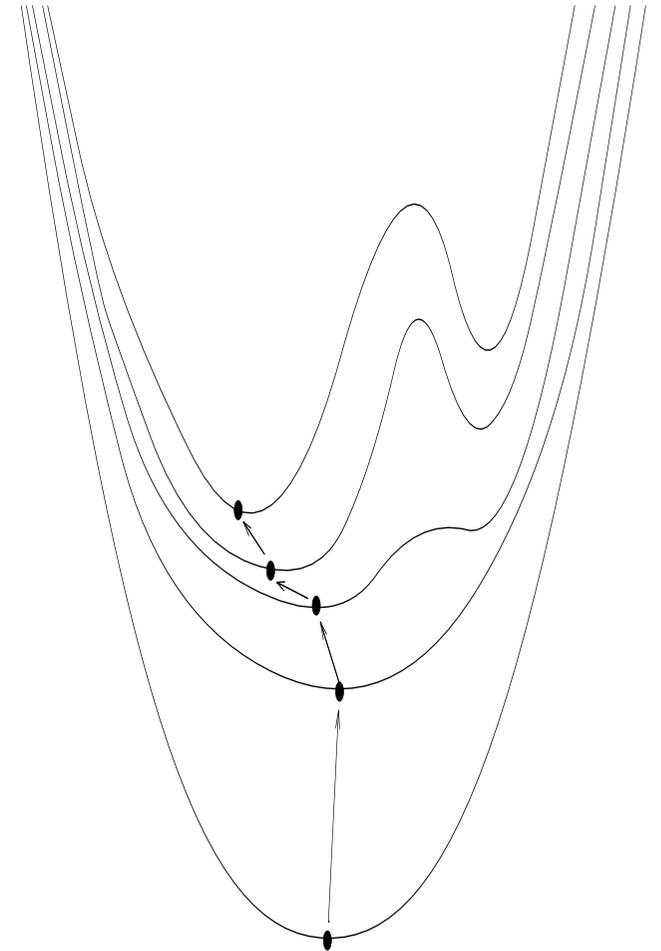
Solution MAP :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{g})\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{J(\mathbf{f})\}$$

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f})\|^2 + \Omega(\mathbf{f}) \text{ multimodal}$$

Principe :

- Définir une suite de critères $J_r(\mathbf{f})$ telles que :
 - $J_{r_0}(\mathbf{f})$ soit convexe
 - $\forall \mathbf{f} \lim_{r \rightarrow r_\infty} J_r(\mathbf{f}) = J(\mathbf{f})$
- Minimiser $J_{r_0}(\mathbf{f})$ pour obtenir \mathbf{f}_0
- Pour une suite de $r = \{r_1, \dots, r_\infty\}$
 - minimiser localement $J_r(\mathbf{f})$ au voisinage de la solution obtenue à l'itération précédente.



Cas des problèmes linéaires

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \Omega(\mathbf{f})$$

Non convexité vient du choix de la loi *a priori* $\Omega(\mathbf{f}) = \sum_j \Omega(f_j - f_{j-1})$ avec

$$\Omega(t) = \begin{cases} |t|^2 & \text{if } |t| < \alpha, \\ \alpha^2 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad \Omega(t) = \frac{\alpha^2 t^2}{1 + t^2}, \quad \Omega(t) = \log \cosh(t/\alpha)$$

- [Blake et Zisserman] :
 - Segmentation d'image $\mathbf{H} = \mathbf{I} \longrightarrow$ Problème bien posé
$$J_{r_k}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \Omega_{r_k}(\mathbf{f}), \quad \exists r_0 \text{ tel que } J_{r_0} \text{ soit convexe}$$
- [Nikolova, Djafari, Idier] :
 - Extension pour les problème mal posés \mathbf{H}
$$\nexists r_0 \text{ tel que } J_{r_0} \text{ soit convexe} \longrightarrow$$

$$J_{r_k}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \Omega_{r_k}(\mathbf{f}) + \Psi_{a_k}(\mathbf{f})$$

Double relaxations: $a_k \mapsto 0$ et $r_0 \mapsto r_\infty$

- Extension pour d'autres modèles que celui de la chaîne ou membrane faible

Cas des problèmes nonlinéaires

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f})\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{f})$$

Non convexité vient surtout du premier terme.

Exemple : Imagerie tomographique par ondes diffractées

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{f}) &= \mathbf{G}_M \mathbf{F} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \phi_0, & \mathbf{F} &= \text{diag}(\mathbf{f}) \\ &= \mathbf{G}_M \Phi_0 (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \mathbf{f}, & \Phi_0 &= \text{diag}(\phi_0) \end{aligned}$$

Il fallait alors trouver un schéma de relaxation
(Thèse de H. Carfantan)

$$J_n(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}_n(\mathbf{f})\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{f})$$

$$\text{avec } \mathbf{h}_n(\mathbf{f}) = \mathbf{G}_M \mathbf{F} (\mathbf{I} - r_n \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \phi_0$$

$$r_0 = 0 \longrightarrow \mathbf{h}_0(\mathbf{f}) = \mathbf{G}_M \Phi_0 \mathbf{f} \quad (\text{Approximation de Born})$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} r_n = 1 \longrightarrow \mathbf{h}_\infty(\mathbf{f}) = \mathbf{h}(\mathbf{f})$$

Approche bayésienne en imagerie de diffraction:

- Estimation directe de \mathbf{f} :

$$\phi_d = \mathbf{h}(\mathbf{f}) + \epsilon \quad \text{avec} \quad \mathbf{h}(\mathbf{f}) = \mathbf{G}_M \mathbf{F} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \phi_0 \quad \text{où} \quad \mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{f})$$

Avec des hypothèses classiques du bruit gaussien et estimation MAP:

$$p(\mathbf{f}|\phi_d) \propto p(\phi_d|\mathbf{f}) p(\mathbf{f}) \longrightarrow J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f})\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{f})$$

Critère non convexe à cause du premier terme.

- Estimation jointe de \mathbf{f} et de ϕ :

$$\begin{cases} \phi_d = \mathbf{G}_M \Phi \mathbf{f} + \epsilon, \\ \phi = \phi_0 + \mathbf{G}_O \Phi \mathbf{f} \end{cases} \longrightarrow p(\mathbf{f}, \phi|\phi_d) \propto p(\phi_d|\mathbf{f}, \phi) p(\phi|\mathbf{f}) p(\mathbf{f})$$

Avec hypothèse de bruit gaussien pour ϵ :

$$J(\mathbf{f}, \phi) = \|\mathbf{g} - \mathbf{G}_M \Phi \mathbf{f}\|^2 + \lambda\Omega(\mathbf{f}) + \lambda^t (\phi - \phi_0 - \mathbf{G}_O \Phi \mathbf{f})$$

Critère quadratique en \mathbf{f} à ϕ fixé et quadratique en ϕ à \mathbf{f} fixé.

Quatre types d'algorithmes d'inversion:

- Deux basés sur les **linéarisations successives des équations**:
 - Approximation affine du modèle autour d'une valeur courante \mathbf{f}_n :

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}) = \mathbf{H}_n \mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}_n$$

- Calcul de \mathbf{f}_{n+1} solution du problème inverse linéaire correspondant.

- Deux basés sur **l'optimisation des critères**:

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f})\|^2 + \lambda \Omega(\mathbf{f})$$

ou minimiser $\|\mathbf{g} - \mathbf{G}_M \boldsymbol{\Phi} \mathbf{f}\|^2 + \lambda \Omega(\mathbf{f})$ s.c. $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_0 - \mathbf{G}_O \boldsymbol{\Phi} \mathbf{f}$

ou $J(\mathbf{f}, \boldsymbol{\phi}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{G}_M \boldsymbol{\Phi} \mathbf{f}\|^2 + \lambda \Omega(\mathbf{f}) + \boldsymbol{\lambda}^t (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0 - \mathbf{G}_O \boldsymbol{\Phi} \mathbf{f})$

ou $J(\mathbf{f}, \boldsymbol{\phi}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{G}_M \mathbf{F} \boldsymbol{\phi}\|^2 + \lambda_1 \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{F} \boldsymbol{\phi}\|^2 + \lambda_2 \Omega(\mathbf{f})$
 $= \|\mathbf{g} - \mathbf{G}_M \boldsymbol{\Phi} \mathbf{f}\|^2 + \lambda_1 \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0 - \mathbf{G}_O \boldsymbol{\Phi} \mathbf{f}\|^2 + \lambda_2 \Omega(\mathbf{f})$

LINÉARISATIONS SUCCESSIVES DES ÉQUATIONS

- **Linéarisations successives de** $\phi_d = h(\mathbf{f}) = \mathbf{G}_M \mathbf{F} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F})^{-1} \phi_0$:

$$h(\mathbf{f}) = h_n(\mathbf{f}) + \nabla_{\mathbf{f}} h(\mathbf{f})(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) + \mathcal{O}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n)^2$$

$$h_n = \mathbf{G}_M (\mathbf{I} + \mathbf{F}_n (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F}_n)^{-1} \mathbf{G}_O) \Phi_n$$

$$\text{avec } \Phi_n = \text{diag}(\phi_n) \text{ et } \phi_n = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_O \mathbf{F}_n)^{-1} \phi_0$$

Distorted Born Iterative Method (Chen et al., 90),
Newton-Kantorovitch (Joachimovitch et al., 91)

- **Linéarisations successives de deux équations:**

$$\begin{cases} \phi_d = \mathbf{G}_M \Phi \mathbf{f}, \\ \phi = \phi_0 + \mathbf{G}_O \mathbf{F} \phi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \phi_d = \mathbf{G}_M \Phi_{n-1} \mathbf{f}_n \\ \phi_{n+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_O \mathbf{F}_n)^{-1} \phi_n \end{cases}$$

Notons l'approximation grossière: $h(\mathbf{f}) = \mathbf{H}_n \mathbf{f}$ avec $\mathbf{H}_n = \mathbf{G}_M \Phi_n$
Born Iterative Method (Wang et al., 89)

OPTIMISATIONS SUCCESSIVES DES CRITÈRES

- **Optimisations successives du critère MAP joint en f et ϕ :**

$$J(\mathbf{f}, \phi) = \|\mathbf{g} - \mathbf{G}_M \mathbf{F} \phi\|^2 + \lambda_1 \|\phi - \phi_0 - \mathbf{G}_O \mathbf{F} \phi\|^2 + \lambda_2 \Omega(\mathbf{f})$$

Kleinman et al (92), Sabbagh et al (93),
Barkeshly et al. (94), Caorsi et al. (95)

- **Optimisation global du critère MAP en f :**

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}(\mathbf{f})\|^2 + \lambda \Omega(\mathbf{f})$$

Recuit simulé (Garnero et al., 91),
Gradient conjugué (Harrington et al., 95),
Non convexité graduelle (GNC), (Carfantan et al., 95),
Iterative Coordinate Descente (ICD), (Carfantan et al., 97). ...

CONCLUSIONS PARTIELLES

- Analyse en dimension finie plus aisée que l'analyse continue.
 - Approche régularisation résout les difficultés liées aux propagation d'erreurs dites "numérique et algorithmique".
 - Approche bayésienne permet d'aller encore plus loin au niveau de la modélisation a priori, de définition des critères, ainsi qu'au niveau d'algorithmie (marginalisation, MCMC, échantillonnage, estimation des hyperparamètres,...)
-
- Modélisation plus sophistiquées:
objets compacts, régions de propriétés constantes,
prise en compte d'information géométriques, ...
 - Fusion de données: (échographie US et microondes)

IMAGERIE D'OBJETS COMPOSÉS D'UN NOMBRE FINI DE MATÉRIAUX

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}(\mathbf{f}) + \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}$$

$$p(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad \longrightarrow \quad p(\mathbf{g}|\mathbf{f}) = \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{f}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \sigma_{\epsilon}^2 \mathbf{I}$$

\mathbf{f} représente une image $f(\mathbf{r})$

$f(\mathbf{r})$ homogène par morceaux

$Z(\mathbf{r})$ prend des valeurs discrètes:

$$z(\mathbf{r}) = k, \quad k = 1, \dots, K$$

$$\mathcal{R}_k = \{\mathbf{r} : z(\mathbf{r}) = k\}, \quad \mathcal{R} = \cup_k \mathcal{R}_k$$

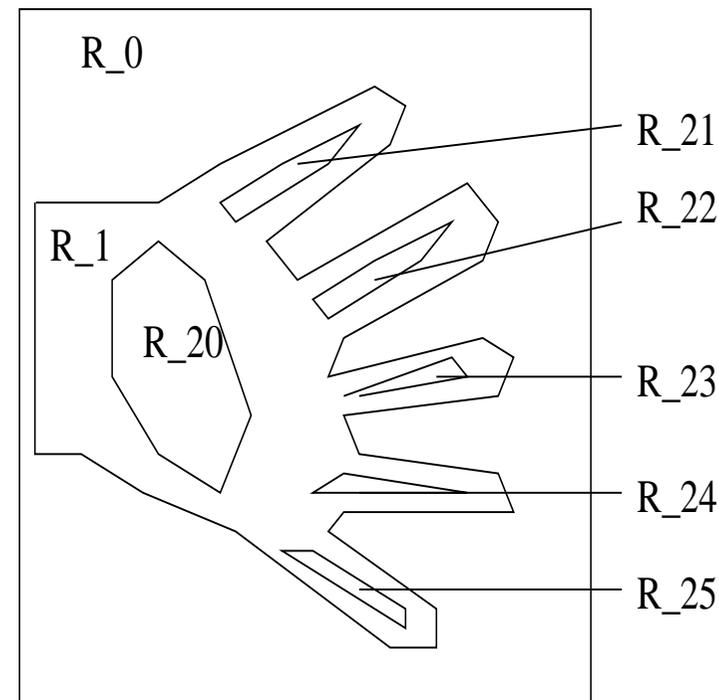
$$p(f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}) = k) = \mathcal{N}(f(\mathbf{r})|m_k, \sigma_k^2)$$

$$p(f(\mathbf{r})) = \sum_k P(z(\mathbf{r}) = k) \mathcal{N}(f(\mathbf{r})|m_k, \sigma_k^2)$$

$$\mathbf{f}_k = \{f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k\} \longrightarrow \mathbf{f} = \{\mathbf{f}_k, k = 1, \dots, K\}$$

$$p(\mathbf{f}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{f}_k|m_k \mathbf{1}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \longrightarrow p(\mathbf{f}|z) = \prod_k p(\mathbf{f}_k)$$

$\mathbf{z} = \{z(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$ représente une image segmentée



- Modèle de mélange (IGM) avec $\{Z(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$ i.i.d.

$$p(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^K p_k \quad \text{avec} \quad P(Z(\mathbf{r}) = k) = p_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1$$

- Modèle de mélange avec un champs de Markov (Potts) pour \mathbf{z}

$$p(\mathbf{z}) \propto \exp \left[\alpha \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{s})) \right]$$

- Lois *a priori* pour les hyperparamètres $\boldsymbol{\theta} = \{\sigma_\epsilon^2, (m_k, \sigma_k^2), k = 1, \dots, K\}$:

$$\begin{aligned} p(m_k) &= \mathcal{N}(m_k | m_{k0}, \sigma_{k0}^2), & p(\sigma_k^2) &= \mathcal{IG}(\sigma_k^2 | \alpha_{k0}, \beta_{k0}), \\ p(\boldsymbol{\Sigma}_k) &= \mathcal{IW}(\boldsymbol{\Sigma}_k | \alpha_{k0}, \boldsymbol{\Lambda}_{k0}), & p(\sigma_{\epsilon_i}^2) &= \mathcal{IG}(\sigma_{\epsilon_i}^2 | \alpha_0^{\epsilon_i}, \beta_0^{\epsilon_i}). \end{aligned}$$

- Loi *a posteriori* jointe de \mathbf{f} , \mathbf{z} and $\boldsymbol{\theta}$

$$p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{g}) \propto p(\mathbf{g} | \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}_1) p(\mathbf{f} | \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_2) p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}_2) p(\boldsymbol{\theta})$$

Supposons d'abord θ et z connus.

Alors l'estimée (MAP) devient:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, z, \theta)\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{J(\mathbf{f}|\mathbf{g}, z, \theta)\}.$$

- Si les pixels dans une région supposés i.i.d. :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{f}|\mathbf{g}, z, \theta) &= \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{f}_k - m_k \mathbf{1}\|^2}{\sigma_k^2} \\ &= \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}_k} \frac{\|f(\mathbf{r}) - m_k\|^2}{\sigma_k^2} \end{aligned}$$

- Si un modèle markovien pour les pixels (dépendance locale) :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{f}|\mathbf{g}, z, \theta) &= \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{\|\tilde{\mathbf{f}}_k - m_k \mathbf{1}\|^2}{\sigma_k^2} \\ &= \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_k^2} \left(\tilde{f}(\mathbf{r}) - \beta_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{s} \in (\mathcal{V}(\mathbf{r}) \cap \mathcal{R}_k)} \tilde{f}(\mathbf{s}) \right)^2 \end{aligned}$$

où $\tilde{f}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - m(\mathbf{r})$, $\beta_{\mathbf{r}} = \frac{1}{n_{\mathbf{r}}}$, $n_{\mathbf{r}} = \text{Card}(\mathcal{V}(\mathbf{r}) \cap \mathcal{R}_k)$.

Mais, on peut estimer $(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta})$ en utilisant $p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g})$

- MAP (Algorithme 1):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g})\} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{f}, \mathbf{z}, \mathbf{g})\} \quad \text{or} \quad = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z}, \mathbf{g})\} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \arg \max_{\mathbf{z}} \{p(\mathbf{z}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g})\} \quad \text{or} \quad = \arg \max_{\mathbf{z}} \{p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{g})\} \end{cases}$$

- MAP-Gibbs (Algorithme 2):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g})\} \\ \text{échantillonner } \hat{\boldsymbol{\theta}} &\text{ suivant } p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{f}, \mathbf{z}, \mathbf{g}) \quad \text{ou suivant } p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z}, \mathbf{g}) \\ \text{échantillonner } \hat{\mathbf{z}} &\text{ suivant } p(\mathbf{z}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}) \quad \text{ou suivant } p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}) \end{cases}$$

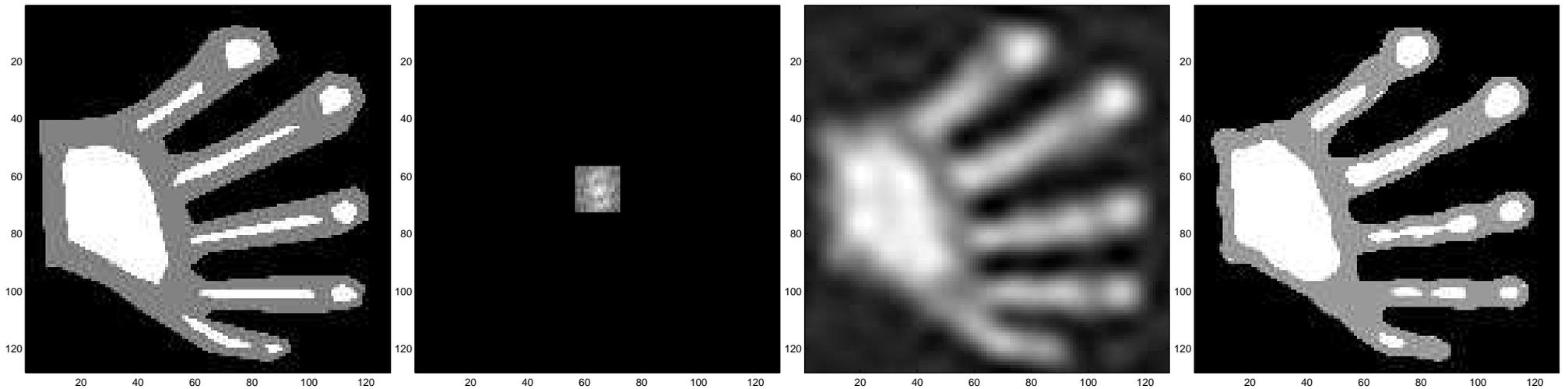
- MAP-Gibbs (Algorithme 3):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g})\} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{f}, \mathbf{z}, \mathbf{g})\} \quad \text{or} \quad = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{z}, \mathbf{g})\} \\ \text{échantillonner } \hat{\mathbf{z}} &\text{ suivant } p(\mathbf{z}|\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}) \quad \text{ou suivant } p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}) \end{cases}$$

EXPRESSION DES LOIS *a posteriori*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}) = \mathcal{N}(\mathbf{f}|\hat{\mathbf{f}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) \quad \text{avec} \\
 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\mathbf{H}^t \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} \mathbf{H} + \boldsymbol{\Sigma}_z^{-1})^{-1} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{f}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} (\mathbf{H}^t \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} \mathbf{g} + \boldsymbol{\Sigma}_z^{-1} \mathbf{m}_z) \\
 \\
 p(\mathbf{z}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) \propto p(\mathbf{g}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{z}) \quad \text{avec} \\
 p(\mathbf{g}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{g}|\mathbf{H}\mathbf{m}_z, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{g}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{g} = \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_z\mathbf{H}^t + \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \\
 \\
 p(m_k|\mathbf{z}, \mathbf{f}) = \mathcal{N}(m_k|\mu_k, v_k) \quad \text{avec} \quad v_k = \left(\frac{n_k}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\sigma_{k0}^2} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_k = v_k \left(\frac{n_k \bar{f}_k}{\sigma_k^2} + \frac{m_{k0}}{\sigma_{k0}^2} \right) \\
 \\
 p(\sigma_k^2|\mathbf{f}, \mathbf{z}) = \mathcal{IG}(\sigma_k^2|\alpha_k, \beta_k) \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \alpha_{k0} + \frac{n_k}{2} \quad \text{et} \quad \beta_k = \beta_{k0} + \frac{n_k \bar{s}_k}{2} \\
 \text{où} \quad \bar{f}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}_k} f_i(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \bar{s}_k = \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}_k} (f(\mathbf{r}) - m_k)^2 \\
 \\
 p(\sigma_\epsilon^2|\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathcal{IG}(\sigma_\epsilon^2|\alpha^\epsilon, \beta^\epsilon) \quad \text{avec} \quad \alpha^\epsilon = \frac{n}{2} + \alpha_0^\epsilon \quad \text{et} \quad \beta^\epsilon = \frac{1}{2} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \beta_0^\epsilon \\
 \\
 n_k = \text{nombre de pixels dans } \mathcal{R}_k \quad \text{et} \quad n = \text{nombre total de pixels.}
 \end{array} \right.$$

SIMULATIONS



a

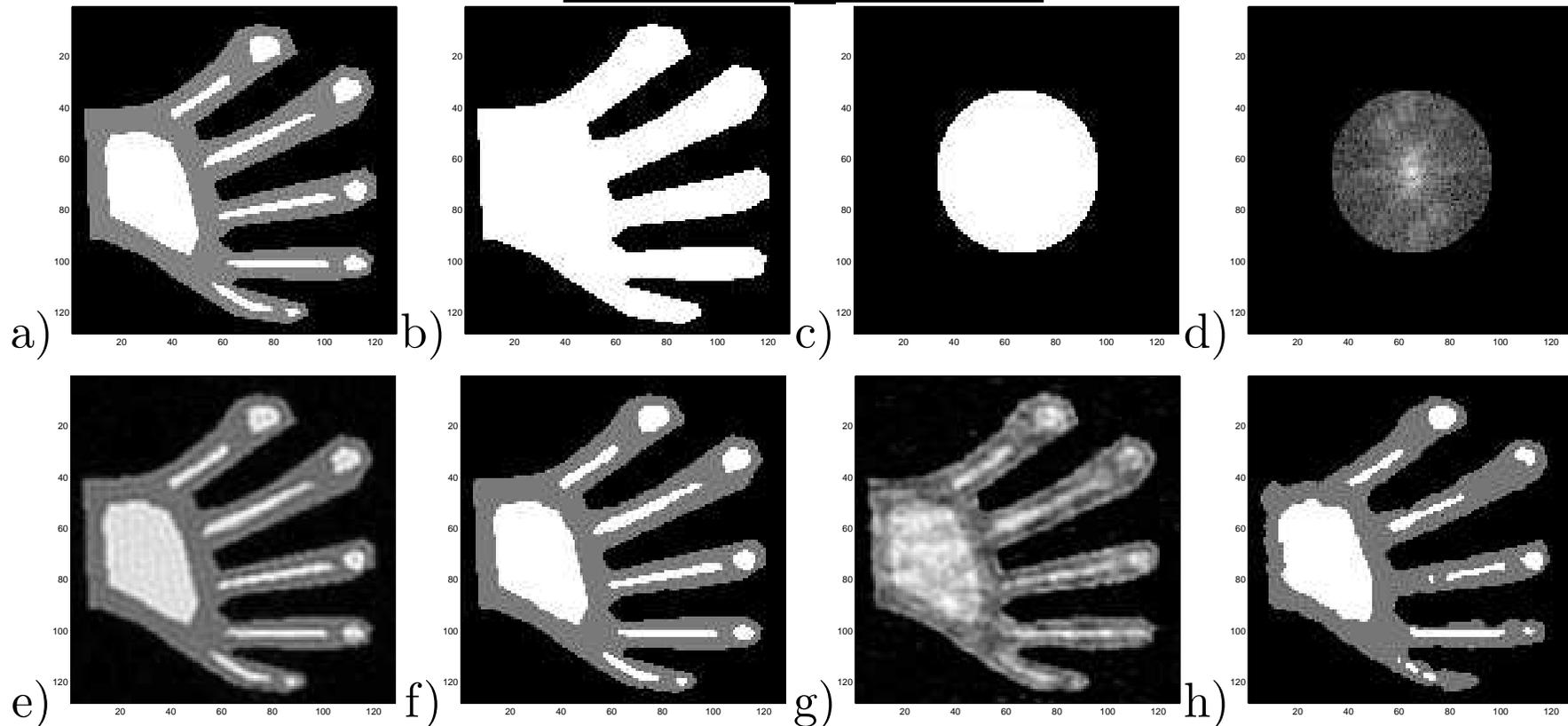
b

c

d

- a) Objet (une image de 128×128 pixels),
- b) Spectre observé (seul les valeurs de la TF sur une grille de 16×16 sont observées),
- c) Reconstruction par TF inverse,
- d) Reconstruction par la méthode proposée

SIMULATIONS (2)

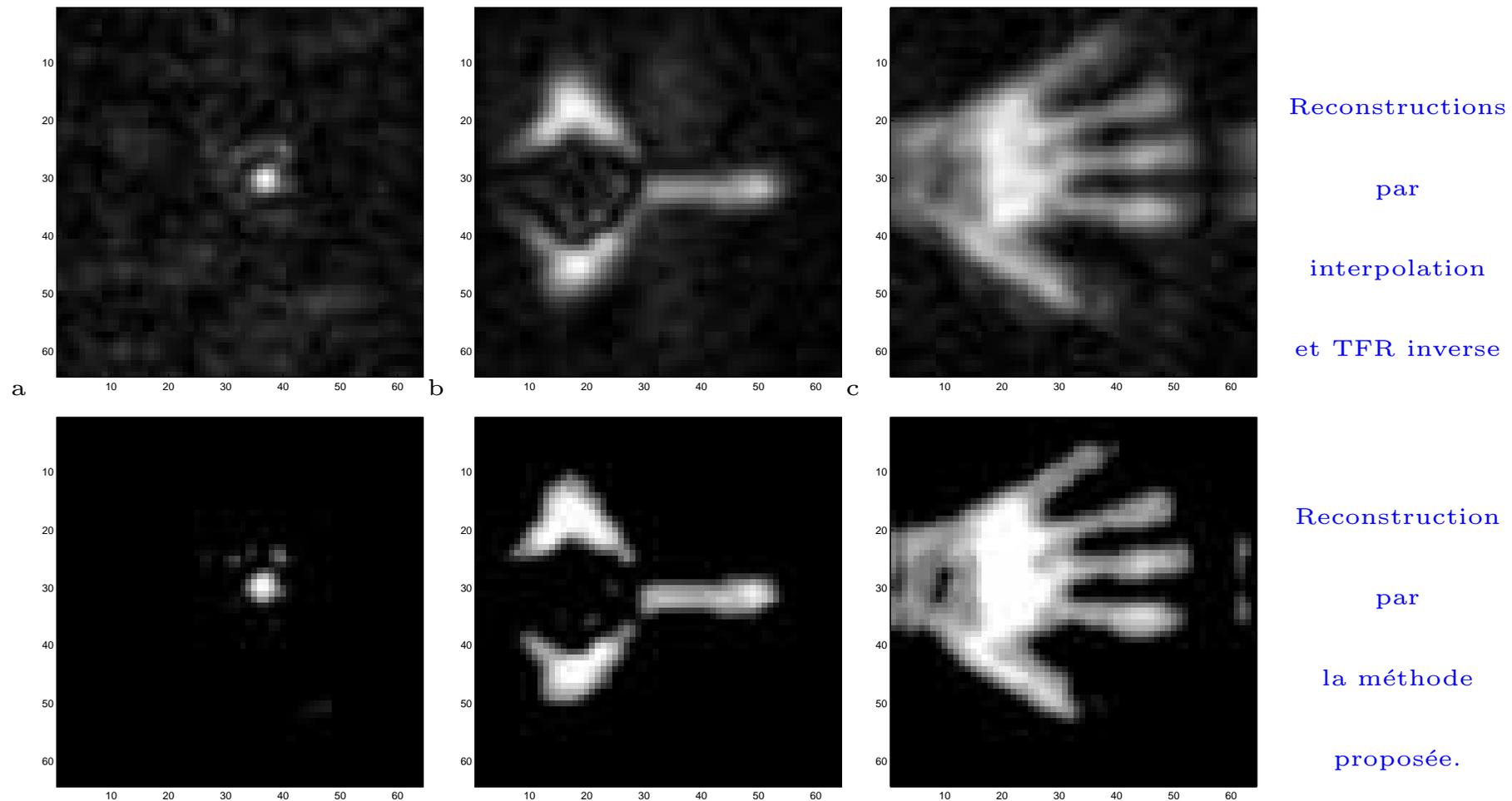


a) objet, b) support connu, c) support des données, d) données mesurées,

Résultats avec phases connues : e) TF inverse et f) méthode proposée,

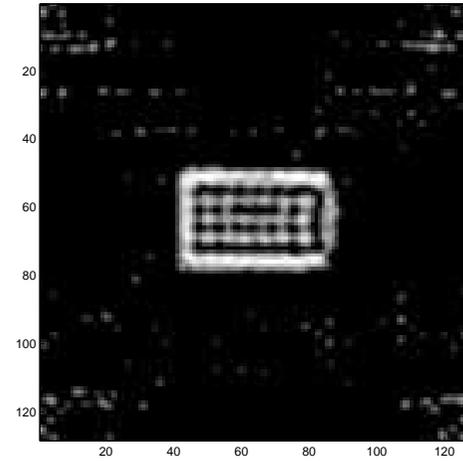
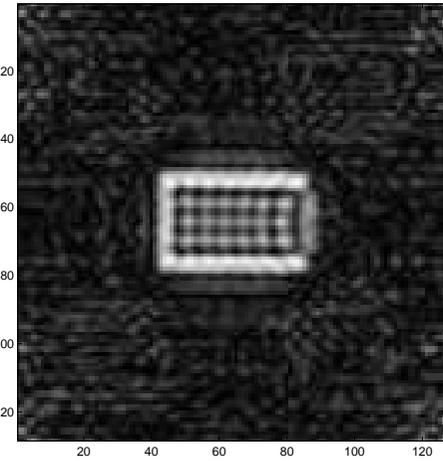
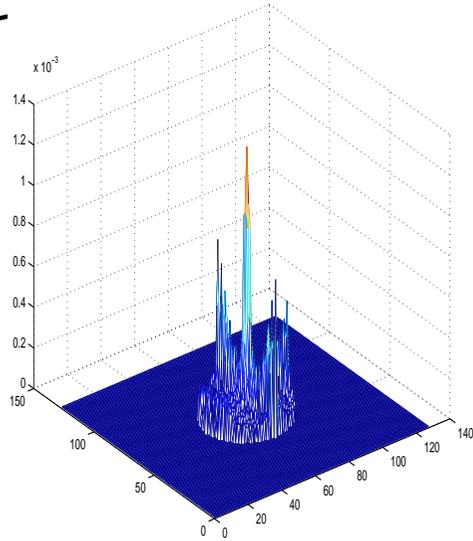
Résultats avec phase inconnues : g) Gerchberg-Saxton et h) méthode proposée.

Application : Synthèse de Fourier en imagerie microonde active

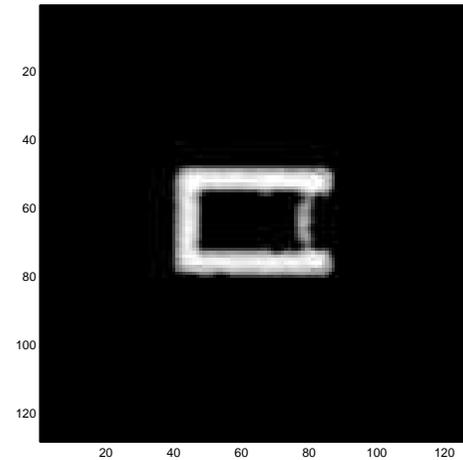
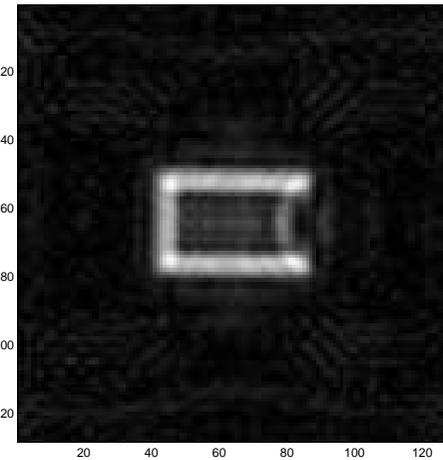
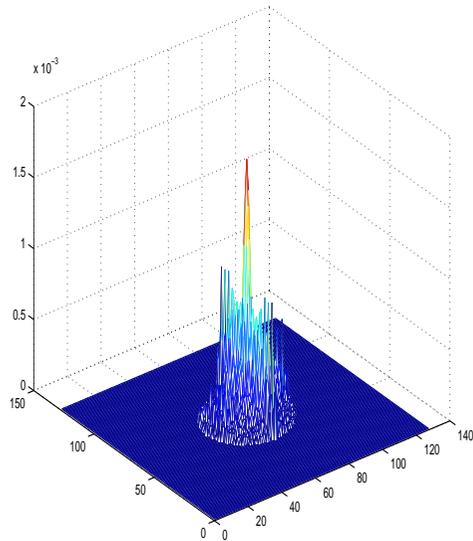


Synthèse de Fourier en imagerie microonde active en transmission dans l'eau à 2,45 GHz en polarisation linéaire horizontale à 10 images/s. Le réseau de mesure comporte (32×32) dipôles espacés de 7 mm (rétine).

a) bille métallique de diamètre 6mm, b) collier métallique et c) main humaine.



Reconstructions
par
interpolation
et TFR inverse



Reconstruction
par
la méthode
proposée.

Synthèse de Fourier en imagerie microonde sur des données issues de la base de l'Institut Fresnel (courtoisie de K. Belkebir et M. Saillard): spectres et images d'un tube métallique en U reconstruites à partir de données à une seule fréquence (en haut : 16 GHz), et à 8 fréquences (en bas : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 et 16 GHz).