

Transformée de Radon
et
Reconstruction d'image

Ali Mohammad-Djafari

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–SUPELEC–UPS)
École Supérieure d'Électricité
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Version provisoire : 5 février 2002

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Principe de l'imagerie tomographique	7
1.2	Tomographie à rayons X et la transformée de Radon (TR)	9
1.3	Transformée de Radon (TR) et transformée de Fourier (TF)	11
1.4	Exemples d'applications	12
2	Définition de la transformée de Radon (TR)	13
2.1	TR d'une fonction à deux variables	13
2.2	TR d'une fonction à trois variables	15
2.3	TR d'une fonction à n variables	15
2.4	Quelques exemples	16
2.5	Résumé du chapitre	19
3	Principales propriétés	21
3.1	Linéarité	21
3.2	Homogénéité	21
3.3	Symétrie	22
3.4	Transformations géométriques	22
3.5	Translation	23
3.6	TR des dérivées d'une fonction	23
3.7	Dérivées de la TR	24
3.8	Convolution	25
3.9	TR des fonctions avec polynômes de Hermite	26
3.10	TR des fonctions avec polynômes de Laguerre	27
3.11	TR des fonctions avec polynômes de Legendre	28
3.12	TR des fonctions harmoniques circulaires	28
3.13	TR des fonctions harmoniques sphériques	29
3.14	Résumé du chapitre	30
4	Relation avec d'autres transformées	33
4.1	Introduction	33
4.2	Relation avec la transformée de Fourier	33
4.3	Relation avec la transformée de Hough	35

4.4	Relation avec la transformée de Gegenbauer	36
5	Inversion analytique	39
5.1	Introduction	39
5.2	Préparatifs	39
5.3	Inversion directe en dimensions impaires	42
5.3.1	Cas général	42
5.3.2	Cas 3-D	42
5.4	Inversion directe en dimensions paires	43
5.4.1	Cas général	43
5.4.2	Cas 2-D	43
5.5	Inversion utilisant la rétroprojection	44
5.6	Inversion dans le domaine de Fourier	46
5.7	Inversion par rétroprojection filtrée	47
5.8	Développement en série	55
5.8.1	Cas des fonctions cylindriques	56
5.8.2	Cas des fonctions sphériques	56
5.8.3	Cas des fonctions sphérique en dimension 4	57
5.8.4	Projection sur une base orthogonale sur le disque uni- taire	58
5.8.5	Projection sur une base orthogonale sur l'ensemble du plan réel	59
6	Inversion numérique et ses difficultés	61
6.1	Introduction	61
6.2	Problèmes inverses, problèmes mal-posés	61
6.3	Existence, unicité et stabilité de la solution	61
6.4	Méthodes algébriques	61
6.5	Difficultés pratiques	61
6.6	Principe de la régularisation	61
6.7	Régularisation avec information a priori de douceur	61
6.8	Régularisation avec information a priori de positivité	61
6.9	Régularisation dans les méthodes itératives	61
6.10	Régularisation avec introduction des contraintes supplémentaires	61
7	Généralisation	63
7.1	Introduction	63
7.2	Transformée de Radon généralisée	63
7.3	Applications	64
8	Transformée de Radon discrète (TRD)	65
8.1	Introduction	65
8.2	Discrétisation de la TR	65
8.3	Définition de la TRD	65

8.4	Inversion de la TRD	66
8.5	TRD et fonctions sphéroïdales aplaties	66
9	Applications	67
9.1	Introduction	67
9.2	Tomographie à rayons X	67
9.3	Tomographie à émission de positrons (TEP)	67
9.4	Tomographie ultrasonore	67
9.5	Astronomie	67
9.6	Microscopie électronique	67
9.7	Imagerie résonance magnétique nucléaire (RMN)	67
9.8	Géophysiques	67
9.9	Autres applications	67
10	Quelques algorithmes	69
10.1	Introduction et objectifs	69
10.2	Programmes d'utilité générale	70
10.3	Programmes d'entrée-sortie et lecture-écriture des fichiers	70
10.4	Programmes de calcul de la TR (des projections)	70
10.5	Programmes des différentes méthodes de reconstruction	70
10.6	Reconstruction par rétroprojection	70
10.7	Reconstruction par les méthodes algébriques de ART et SIRT	70
10.8	Reconstruction par les méthodes de régularisation	70
11	Bibliographie	71
A	Transformations linéaires	73
A.1	Transformations 1-D	74
A.2	Transformations 2-D	78
B	Fonctions spéciales	83
B.1	Tchebycheff de première espèce	83
B.2	Tchebycheff de deuxième espèce	84
B.3	Hermite	85
B.4	Laguerre	86
B.5	Gegenbauer	86
B.6	Legendre	87
B.7	Zernike	88
C	Coordonnées cartésiennes et hypersphériques dans un espace de dimension n	91

Chapitre 1

Introduction

Parmi les transformations linéaires, la *transformée de Radon* (TR) a une place privilégiée dans les problèmes de reconstruction tomographique d'image. En effet, dans ces problèmes la relation entre les mesures et l'objet, dans une première approximation, peut être modélisée par la TR. Le problème de la reconstruction devient alors celui de l'inversion de la transformée de Radon à partir d'un nombre fini de projections. L'objectif principal de ce rapport est d'étudier en détail cette transformation.

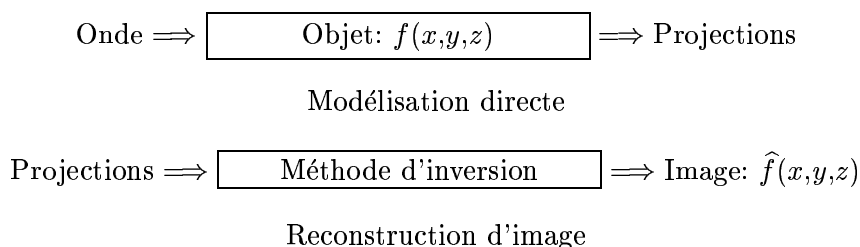
1.1 Principe de l'imagerie tomographique

L'objectif de l'imagerie tomographique d'un objet est de fournir une image de la structure interne de cet objet, ou plus précisément une propriété particulière de cette structure, sans être obligé de le couper ou de l'endommager d'une façon quelconque. Par exemple on veut détecter s'il y a une non-homogénéité de la matière à l'intérieur de l'objet.

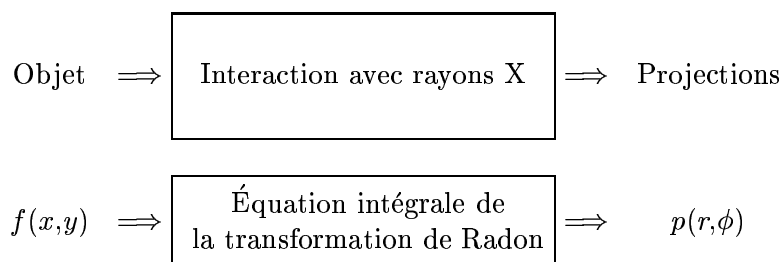
En tomographie à rayons X on cherche à déterminer une fonction $f(x,y,z)$ représentant la distribution spatiale de la densité de la matière à l'intérieur de l'objet. En tomographie ultrasonore on cherche à déterminer la distribution de la vitesse de la propagation des ondes ultrasonores à l'intérieur de l'objet. En tomographie microondes c'est la distribution de la conductivité électrique ou de la permittivité complexe, en tomographie à émission de positrons (TEP) c'est la distribution de la densité des matières radioactives, et finalement, en imagerie résonance magnétique nucléaire (RMN), c'est la distribution de la densité du spin magnétique à l'intérieur de l'objet que l'on cherche à déterminer.

D'une manière plus générale, le principe de la tomographie consiste à faire interagir une onde (par exemple : rayons X, rayons gamma, ultrasons, micro-ondes, etc.) avec l'objet et à mesurer le résultat de l'interaction de ces ondes avec l'objet que l'on appellera des *projections*. Puis on modélise cette interaction par une relation mathématique, par exemple, sous forme

d'une équation intégrale reliant une fonction $f(x,y,z)$ représentant la distribution d'une propriété interne de l'objet à ces projections. Le problème de la reconstruction d'image devient alors l'inversion de cette relation.



La transformée de Radon (TR) et sa généralisation nous donnent une base mathématique pour une large classe de problèmes de reconstruction. En effet, nous verrons aux paragraphes suivants que l'on peut modéliser le problème de la tomographie par le schéma suivant:



Ceci veut dire qu'une propriété interne de l'objet (la distribution de la densité de matière par exemple) est identifiée ou approchée par une fonction $f(x,y)$, et que les projections sont identifiées ou approchées par une fonction $p(r,\phi)$ reliée à la fonction $f(x,y)$ par l'équation intégrale de la TR. On peut alors s'imaginer que la reconstruction d'image consiste à inverser cette équation intégrale qui est la TR:

$$p(r,\phi) \implies \boxed{\text{Méthode d'inversion de la TR}} \implies \hat{f}(x,y)$$

Reconstruction d'image en tomographie à rayons X

En pratique cependant, les mesures sont discrètes. En particulier les projections sont obtenues pour les valeurs discrètes de ϕ . C'est alors plus convenable de dire que chaque projection $p(r,\phi_i)$ nous fournit un échantillonnage de la TR de la fonction $f(x,y)$. La multiplication des projections obtenues dans des conditions différentes nous permet de "remplir" progressivement le domaine de la transformée. Lorsque cette connaissance est suffisante, il ne reste plus qu'à effectuer une transformation inverse pour récupérer l'objet. Mais la connaissance de tous les échantillons n'est malheureusement pas possible dans une situation réelle et on ne peut mesurer qu'un sous-ensemble de ces échantillons. Nous verrons que c'est là que se situe la difficulté de la résolution du problème.

1.2 Tomographie à rayons x et la transformée de Radon (TR)

Si un objet de matière homogène est illuminé par des rayons x et qu'un rayon mono-énergétique de faible largeur traverse cet objet, l'intensité du rayon mesuré à la sortie s'obtient par

$$I = I_0 \exp[-\mu L] \quad (1.1)$$

où I_0 est l'intensité du rayon à l'entrée, L est la distance parcourue par le rayon, et μ est la constante d'atténuation linéaire de l'objet qui dépend de la densité de la matière et de sa composition nucléaire.

Considérons maintenant une section transversale d'un objet non homogène perpendiculaire à l'axe oz , et supposons que les rayons traversent cette section. En caractérisant l'objet par la distribution de sa constante d'atténuation linéaire μ qui est une fonction continue de deux variables d'espace; $\mu(x,y) = f(x,y)$; on a alors

$$\frac{I}{I_0} = \exp \left[- \int_L f(x,y) dl \right] \quad (1.2)$$

ou bien

$$- \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \int_L f(x,y) dl \quad (1.3)$$

où dl est l'élément de longueur sur le parcours L . Ainsi, si on déplace en parallèle l'émetteur (source S) et le récepteur (détecteur D) sur une ligne droite faisant un angle ϕ avec l'axe ox on obtient une projection $p(r,\phi)$:

$$p(r,\phi) = \int_L f(x,y) dl \quad (1.4)$$

En se référant aux figures 1.1 et 1.2, on voit que cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$p(r,\phi) = \iint_D f(x,y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy \quad (1.5)$$

ou encore

$$\tilde{f}(r,\phi) = \int f(r \cos \phi - s \sin \phi, r \sin \phi + s \cos \phi) ds \quad (1.6)$$

Pour des variables continues r et ϕ , $p(r,\phi)$ est, par définition, la transformée de Radon de la fonction $f(x,y)$.

Ainsi on constate que chaque projection définit un échantillonnage de la TR de la fonction $f(x,y)$. J. Radon [4] a montré l'existence et l'unicité de cette transformée et de son inverse pour des fonctions continues et de supports compacts. Ceci peut être résumé ainsi :

- Si $f(x,y)$ est continue et a un support compact, alors $p(r,\phi) = \mathcal{R}\{f(x,y)\}$ est déterminée d'une façon unique par le résultat de l'intégration sur toutes les lignes droites $L_{r,\phi}$ dans le plan $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $r \in \mathbf{R}$, $\phi \in [0,\pi]$.

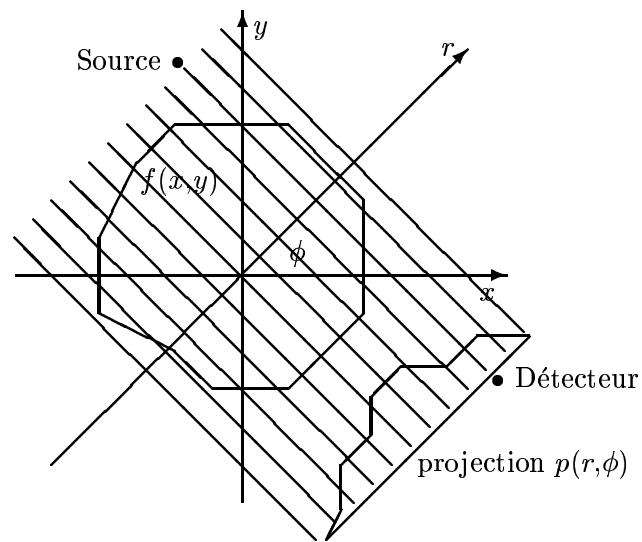


FIG. 1.1 – Tomographie à rayons X

- La connaissance de $p(r, \phi)$ en tout point $r \in \mathbf{R}$ et $\phi \in [0, \pi]$ permet de déterminer d'une façon unique la fonction $f(x, y)$

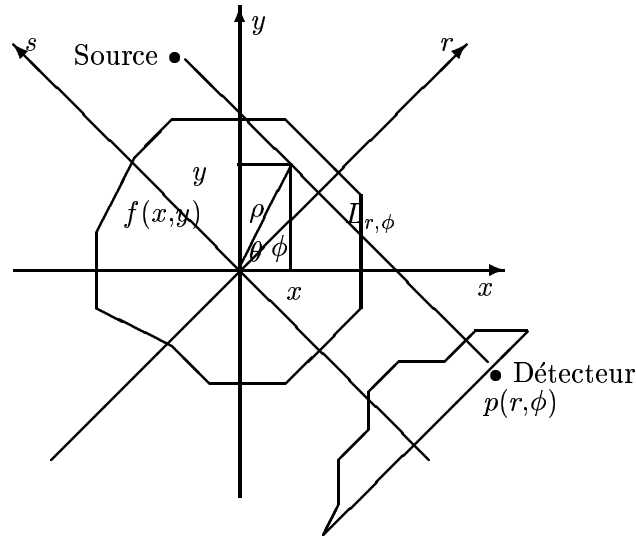


FIG. 1.2 – Notations utilisées pour la définition de la projection $p(r, \phi)$ d'une fonction $f(x, y)$

1.3 Transformée de Radon (TR) et transformée de Fourier (TF)

Il existe une relation fondamentale entre la TR et la TF d'une fonction. C'est cette relation qui a permis le développement de différentes méthodes de reconstruction tomographiques. Avant de développer cette relation, nous allons nous familiariser avec les notations utilisées et, pour faciliter la compréhension, nous donnons ces relations pour une fonction scalaire dans un espace à deux dimensions (2-D). La généralisation dans un espace à 3-D s'en déduit facilement.

Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace à 2-D, $f(x, y)$ une fonction continue et à support compact des deux variables d'espace x et y , et $L_{r, \phi}$ un ensemble de lignes droites parallèles dans ce plan définies par $r = x \cos \phi + y \sin \phi$. On définit alors la transformée de Radon de f , notée \tilde{f} , par

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_{L_{r, \phi}} f(x, y) dl = \int_{L_{r, \phi}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) dl \quad (1.7)$$

où dl est un élément de longueur sur chacune de ces lignes droites $L_{r, \phi}$.

$$\hat{\tilde{f}}(\Omega, \phi) = \int \tilde{f}(r, \phi) \exp[-j\Omega r] dr \quad (1.8)$$

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) \exp[-j(\omega_x x + \omega_y y)] dx dy \quad (1.9)$$

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \exp [+j(\omega_x x + \omega_y y)] d\omega_x d\omega_y \quad (1.10)$$

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \hat{\hat{f}}(\Omega, \phi) \quad \text{pour} \quad \omega_x = \Omega \cos \phi \quad \text{et} \quad \omega_y = \Omega \sin \phi \quad (1.11)$$

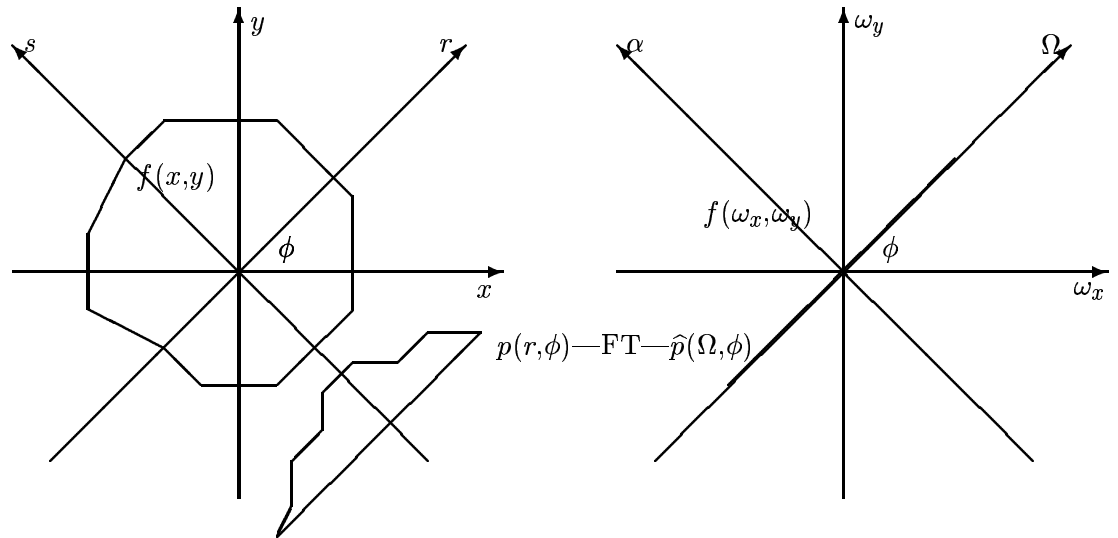


FIG. 1.3 – *Théorème de Projection : Relation entre la TF 1-D de la projection $p(r,\phi)$ et la TF 2-D de $f(x,y)$*

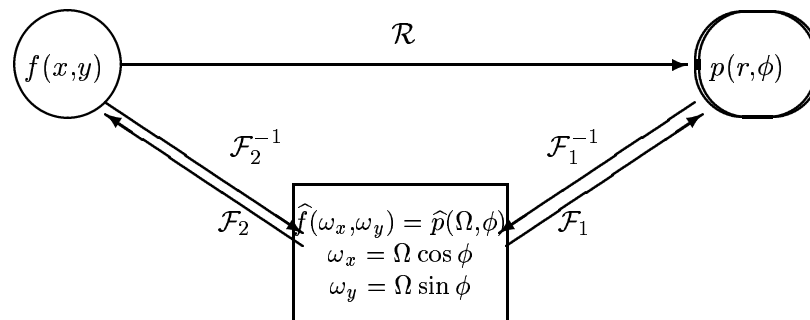


FIG. 1.4 – *Relation entre la TR et TF*

1.4 Exemples d'applications

Chapitre 2

Définition de la transformée de Radon (TR)

Dans ce chapitre, d'abord la transformée de Radon (TR) est définie pour les fonctions à deux variables ($f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$), puis à trois variables ($f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$) et, finalement, pour le cas général de n variables ($f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$). Les fonctions que l'on considère ici appartiennent soit à la famille des fonctions \mathcal{C}^∞ à décroissances rapides ou à supports compacts. Cette restriction nous permet plus facilement étudier les propriétés de la TR. L'objectif de ce chapitre est donc de fournir les différentes formes de la définition de la TR et de calculer d'une manière explicite la TR d'un certain nombre de fonctions usuelles.

2.1 TR d'une fonction à deux variables

Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace à 2-D, $f(x, y)$ une fonction continue à support compact et $L_{r, \phi}$ un ensemble de lignes droites dans ce plan défini par $r = x \cos \phi + y \sin \phi$. En se référant à la figure 2.1, la transformée de Radon de $f(x, y)$, notée $\tilde{f}(r, \phi)$, est définie par la relation suivante :

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_{L_{r, \phi}} f(x, y) dl = \iint f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy \quad (2.1)$$

où dl est un élément de longueur sur chacune de ces lignes droites $L_{r, \phi}$.

En effectuant différents changements de variables, on peut obtenir d'autres expressions pour \tilde{f} . Par exemple, en effectuant les changements de variables $x = \rho \cos \theta$, et $y = \rho \sin \theta$ pour les coordonnées polaires (ρ, θ) , on obtient :

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\rho, \theta) \delta(r - \rho \cos(\phi - \theta)) \rho d\rho d\theta \quad (2.2)$$

Si on définit les vecteurs unitaires $\xi = [\cos \phi, \sin \phi]^t$ et $\xi^\perp = [-\sin \phi, \cos \phi]^t$ et le vecteur de position $\mathbf{x} = [x, y]^t$, on peut vérifier facilement que l'on a

$$r = \xi^t \mathbf{x} = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (2.3)$$

et que l'on peut alors écrire

$$\tilde{f}(r, \phi) = \iint_{r=x \cos \phi + y \sin \phi} f(x, y) \, dx \, dy = \iint f(x, y) \delta(r - \xi^t \mathbf{x}) \, dx \, dy \quad (2.4)$$

où encore

$$\tilde{f}(r, \xi) = \int_{r=\xi^t \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \xi^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

Notons que le vecteur unitaire ξ ou l'angle ϕ définissent la direction des lignes sur lesquelles l'intégration s'effectue. Cette dernière notation facilite son extension à 3-D. Désormais nous utiliserons indifféremment ces notations.

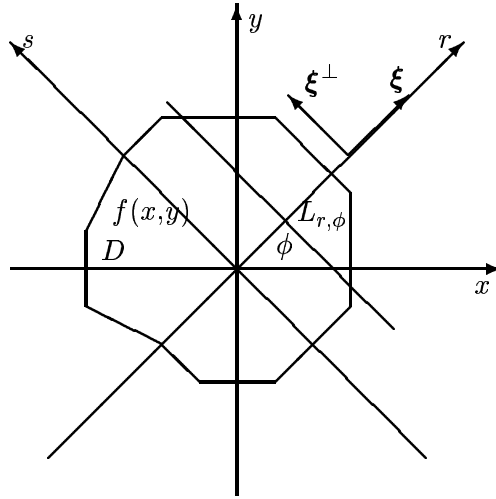


FIG. 2.1 – Notations utilisées pour la définition de la transformée de Radon en 2-D

Deux autres relations plus explicites sont les suivantes :

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int f(r \cos \phi - s \sin \phi, r \sin \phi + s \cos \phi) \, ds \quad (2.6)$$

$$\tilde{f}(r, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos \phi|} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{r - s \sin \phi}{\cos \phi}, s\right) \, ds & \text{si } \cos \phi \neq 0 \\ \frac{1}{|\sin \phi|} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{r - s \cos \phi}{\sin \phi}, s\right) \, ds & \text{si } \sin \phi \neq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2 TR d'une fonction à trois variables

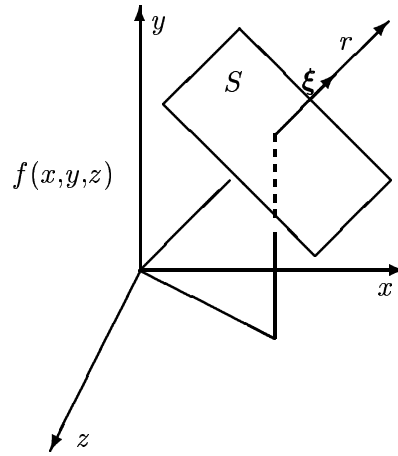


FIG. 2.2 – Notations utilisées pour la définition de la transformée de Radon en 3-D

La généralisation de la TR à 3-D est obtenue simplement en définissant le vecteur de position $\mathbf{x} = [x, y, z]^t$ et un vecteur unitaire $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^t$ avec $|\boldsymbol{\xi}| = 1$ qui définit une direction dans l'espace (figure 2.2), ainsi que $d\mathbf{x} = dx dy dz$. On a ainsi $r = \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x} = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z$ et on a

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \int_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

On note qu'ici $r = \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}$ définit une surface plane perpendiculaire à $\boldsymbol{\xi}$ et l'intégration s'effectue sur un plan perpendiculaire au vecteur unitaire $\boldsymbol{\xi}$.

Utilisant les coordonnées sphérique et notant $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$ on obtient la relation explicite suivante :

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \iiint f(x, y, z) \delta(r - x \sin \theta \cos \phi - y \sin \theta \sin \phi - z \cos \theta) dx dy dz \quad (2.9)$$

2.3 TR d'une fonction à n variables

En définissant

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^t,$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^t \quad \text{avec} \quad |\boldsymbol{\xi}| = 1,$$

$$d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

et

$$r = \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n,$$

on généralise facilement la TR à une fonction de n variables par :

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

2.4 Quelques exemples

Exemple 1 :

$$f(x, y) = \exp [-(x^2 + y^2)]$$

On peut calculer sa TR de la manière suivante :

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \iint \exp [-(x^2 + y^2)] \delta(r - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \iint \exp [-(u^2 + v^2)] \delta(r - u) du dv \\ &= \int \exp [-v^2] \int \exp [-u^2] \delta(r - u) du dv \\ &= \int \exp [-v^2] \exp [-r^2] dv \\ &= \exp [-r^2] \int \exp [-v^2] dv = \sqrt{\pi} \exp [-r^2] \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{R} \left\{ \exp [-(x^2 + y^2)] \right\} = \sqrt{\pi} \exp [-r^2]$$

Exemple 2 :

$$f(x, y, z) = \exp [-(x^2 + y^2 + z^2)]$$

On peut calculer la TR de cette fonction de la même manière que dans l'exemple précédent en effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 \xi_2 / q & 0 & -\xi_2 \xi_3 / q \\ -\xi_3 / q & 0 & \xi_1 / q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où $q = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$ et $|\xi| = 1$. Ainsi on obtient facilement le résultat suivant :

$$\mathcal{R} \left\{ \exp \left[-(x^2 + y^2 + z^2) \right] \right\} = \pi \exp \left[-r^2 \right]$$

On peut généraliser ce résultat à une fonction à n variables :

$$\mathcal{R} \left\{ \exp \left[-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \right] \right\} = (\sqrt{\pi})^{n-1} \exp \left[-r^2 \right]$$

Exemple 3 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour le calcul de la TR de cette fonction il est plus simple de choisir la géométrie et la définition de la TR donnée dans l'équation (2.7). On obtient alors facilement

$$\tilde{f}(r,\phi) = \mathcal{R} \{f\} = \begin{cases} \frac{r}{\sin \phi \cos \phi} & 0 < r \leq \sin \phi \\ \frac{1}{\cos \phi} & \sin \phi < r \leq \cos \phi \\ \frac{\sin \phi + \cos \phi - r}{\sin \phi \cos \phi} & \cos \phi < r \leq \sin \phi + \cos \phi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple 4 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r,\phi) &= \int f(r \cos \phi - s \sin \phi, r \sin \phi + s \cos \phi) ds \\ &= \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{+\sqrt{1-r^2}} ds = \begin{cases} 2\sqrt{1-r^2} & r < 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 5 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(r,\phi) = \begin{cases} \frac{2ab}{s} \sqrt{1 - (r/s)^2} & \text{si } r/s < 1 \\ 0 & \text{si } r/s > 1 \end{cases}, \quad \text{avec } s^2 = a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi$$

Exemple 6 :

$$f(x,y) = \delta(x) \delta(y)$$

$$\tilde{f}(r,\phi) = \delta(r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 7 :

$$f(x,y) = \delta(x - a) \delta(y - b)$$

$$\tilde{f}(r,\phi) = \delta(r - r_0) = \begin{cases} 1 & r = a \cos \phi + b \sin \phi = r_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La TR d'une fonction concentrée en un point est une fonction concentrée sur un cercle. La TR transforme un point dans l'espace (x,y) en un cercle dans l'espace (r,ϕ) .

Exemple 8 :

$$f(\rho,\theta) = \begin{cases} 1 & \rho^2 = x^2 + y^2 < R^2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(r,\phi) = \begin{cases} 2(R^2 - r^2)^{1/2} & r < R, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple 9 :

$$f(\rho,\theta) = \begin{cases} 1 - \rho^2 & \rho^2 = x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(r,\phi) = \begin{cases} 4/3(1 - r^2)^{3/2} & r < 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple 10 :

$$f(\rho,\theta) = \begin{cases} \rho^2 \rho \cos \theta = (x^2 + y^2)x & \rho^2 = x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(r,\phi) = \begin{cases} 2r/3(2r^2 + 1)(1 - r^2)^{1/2} \cos \phi & r < 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2.5 Résumé du chapitre

– Définition en 2D

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_L f(x, y) dl$$

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r \cos \phi - s \sin \phi, r \sin \phi + s \cos \phi) ds$$

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(\rho, \theta) \delta(r - \rho \cos(\phi - \theta)) \rho d\rho d\theta$$

$$\tilde{f}(r, \phi) = \iint f(x, y) \delta(r - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy$$

– Définition en n -D

$$\tilde{f}(r, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r\xi + s\xi^\perp) ds$$

$$\tilde{f}(r, \xi) = \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \xi^t \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$f(x, y)$	\rightarrow TR \rightarrow	$\tilde{f}(r, \phi)$
$\exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} \exp[-r^2]$
$\exp[-\pi(x^2 + y^2)]$		$\exp[-\pi r^2]$
$x \exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} r \exp[-r^2] \cos \phi$
$y \exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} r \exp[-r^2] \sin \phi$
$x^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} \left(r^2 \cos^2 \phi + \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right) \exp[-r^2]$
$y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} \left(r^2 \sin^2 \phi + \frac{1}{2} \cos^2 \phi \right) \exp[-r^2]$
$(x^2 + y^2) \exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} \left(r^2 + \frac{1}{2} \right) \exp[-r^2]$
$x^2 y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$		$\sqrt{\pi} \left[\cos^2 \phi \sin^2 \phi \left(r^4 - 3r^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{r^2}{2} \right] \exp[-r^2]$
$\exp[-(x-a)^2 - (y-b)^2]$		$\sqrt{\pi} \exp[-(r - a \cos \phi - b \sin \phi)^2]$
$\exp[-(x/a)^2 - (y/b)^2]$		$\frac{ab\sqrt{\pi}}{s} \exp[-(r/s)^2]$
		avec $s^2 = a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi$

$$\begin{array}{ccc}
 f(x,y,z) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow & \tilde{f}(r,\xi) \\
 \exp [-(x^2 + y^2 + z^2)] & & (\sqrt{\pi})^{n-1} \exp [-r^2] \\
 \exp [-\pi(x^2 + y^2 + z^2)] & & \exp [-\pi r^2]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f(x,y) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow & \tilde{f}(r,\phi) \\
 \delta(x-a)\delta(y-b) & & \delta(r-r_0) \text{ avec } r_0 = a \cos \phi + b \sin \phi \\
 \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & \begin{cases} 2\sqrt{1-r^2} & \text{si } r < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\
 \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 < R^2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & \begin{cases} 2\sqrt{R^2-r^2} & \text{si } r < R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\
 \begin{cases} 1 & (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & \begin{cases} \frac{2ab}{s}\sqrt{1-(r/s)^2} & \text{si } r/s < 1 \\ 0 & \text{si } r/s > 1 \end{cases} \\
 & & \text{avec } s^2 = a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{cases} x^2 & |\rho^2 = x^2 + y^2| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & \sqrt{1-r^2} \left(2r^2 \cos^2 \phi + \frac{2}{3}(1-r^2) \sin^2 \phi \right) \\
 \begin{cases} x(x^2 + y^2) & |\rho^2 = x^2 + y^2| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & \frac{2r}{3}(2r^2 + 1)\sqrt{1-r^2} \cos \phi \\
 \begin{cases} x(x^2 + y^2)^{1/2} & |\rho^2 = x^2 + y^2| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & 2r \left[\frac{\sqrt{1-r^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \right) \right] \cos \phi \\
 \begin{cases} 1 - \rho^2 & |\rho^2 = x^2 + y^2| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} & & \frac{4}{3}(1-r^2)^{3/2}
 \end{array}$$

Chapitre 3

Principales propriétés

De nombreuses propriétés de la TR d'une fonction $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ s'obtiennent directement à partir de sa définition :

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Dans ce chapitre, ces propriétés sont énumérées dans le cas général tout en les accompagnant par des exemples spécifiques en deux ou trois variables.

3.1 Linéarité

Considérons les deux fonctions f et g et les deux réels a et b . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\} &= \int \{af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\} \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= a\mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} + b\mathcal{R}\{g(\mathbf{x})\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2 Homogénéité

$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$ est une fonction homogène d'ordre un. Pour la montrer il suffit de constater que pour un nombre réel $s \neq 0$ on a :

$$\tilde{f}(sr, s\boldsymbol{\xi}) = \int f(\mathbf{x}) \delta(sr - s\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{|s|} \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.3)$$

d'où la propriété d'homogénéité :

$$\tilde{f}(sr, s\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|s|} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.4)$$

3.3 Symétrie

Dans l'équation 3.4 pour $s = -1$ on a :

$$\tilde{f}(-r, -\boldsymbol{\xi}) = \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.5)$$

On montre facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r, s\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{s} \tilde{f}\left(\frac{r}{s}, \boldsymbol{\xi}\right), \quad s > 0 \\ \tilde{f}(sr, \boldsymbol{\xi}) &= s\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.4 Transformations géométriques

Soient x et y deux vecteurs représentant deux points de l'espace \mathbb{R}^n tel que

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.7)$$

où \mathbf{A} est une matrice carrée non singulière. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{f(\mathbf{A}\mathbf{x})\} &= \int f(\mathbf{A}\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \det\{\mathbf{A}^{-1}\} \int f(\mathbf{y}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \det\{\mathbf{A}^{-1}\} \tilde{f}(r, \mathbf{A}^{-t} \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou d'une façon équivalente :

$$\mathcal{R}\{f(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})\} = \det\{\mathbf{A}\} \tilde{f}(r, \mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}) = \frac{\det\{\mathbf{A}\}}{|\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}|} \tilde{f}\left(\frac{r}{|\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}|}, \frac{\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}|}\right) \quad (3.9)$$

Deux cas particulier sont intéressants:

- Si \mathbf{A} est une matrice de rotation, *i.e.*; $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}$ et $\det\{\mathbf{A}\} = \det\{\mathbf{A}^{-1}\} = 1$, on a

$$\mathcal{R}\{f(\mathbf{A}\mathbf{x})\} = \tilde{f}(r, \mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}) \quad (3.10)$$

- Si $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}$, on a

$$\mathcal{R}\{f(\lambda \mathbf{x})\} = \frac{1}{\lambda^n} \tilde{f}\left(r, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \tilde{f}(\lambda r, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.11)$$

3.5 Translation

Soient \mathbf{x} , \mathbf{b} et \mathbf{y} trois vecteurs de \mathbf{R}^n tels que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Il s'agit alors de trouver une relation entre $\mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\}$ et $\mathcal{R}\{f(\mathbf{y})\}$. Pour cela on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{f(\mathbf{x} + \mathbf{b})\} &= \int f(\mathbf{x} + \mathbf{b}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{y}) \delta(r + \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{y}) d\mathbf{y}\end{aligned}\quad (3.12)$$

On a ainsi la propriété suivante :

$$\mathcal{R}\{f(\mathbf{x} \pm \mathbf{b})\} = \tilde{f}(r \pm \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.13)$$

3.6 TR des dérivées d'une fonction

Étant donnée une fonction $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, il s'agit de trouver une relation entre la TR de $f(\mathbf{x})$ et la TR des fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^t, \quad \mathbf{a}^t \nabla f = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \text{et} \quad \Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_k^2}$$

– Dérivée :

$$\mathcal{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\} = \xi_k \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} \quad (3.14)$$

– Gradient :

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^t \rightarrow \text{TR} \rightarrow \left[\xi_1 \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r}, \dots, \xi_k \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} \right]^t \quad (3.15)$$

$$\mathcal{R}\{\mathbf{a}^t \nabla f\} = \mathbf{a}^t \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} \quad (3.16)$$

– Dérivée seconde :

$$\mathcal{R}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\right\} = \xi_l \xi_k \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{R}\left\{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\right\} = (\mathbf{a}^t \boldsymbol{\xi})(\mathbf{b}^t \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2} \quad (3.18)$$

– Laplacienne dans l'espace objet \mathbf{x} :

$$\mathcal{R}\{\Delta f\} = |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2} \quad (3.19)$$

– un opérateur linéaire L composé d'un polynome des dérivées :

$$\mathcal{R}\{Lf\} = L\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial r}, \dots, \xi_n \frac{\partial}{\partial r}\right) \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.20)$$

– Exemple 1 :

$$L = a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_3^2}$$

$$\mathcal{R}\{Lf\} = \left(a \xi_1 \frac{\partial}{\partial r} + b \xi_2 \xi_3^2 \frac{\partial^3}{\partial r^3} \right) \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$$

– Exemple 2 : Considérons la fonction $f(x, y, z; t)$ représentant une onde satisfaisant à l'équation du propagation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Notant sa TR par $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}; t) = \mathcal{R}\{f(x, y, z; t)\}$, on a

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}$$

ce qui vaut dire que les deux opérateurs \mathcal{R} et $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ commutent.

– Dans un cas plus général, si on définit les opérateurs

$$\square \varphi(r, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(r, \boldsymbol{\xi}), \quad \text{et} \quad \Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(\mathbf{x})$$

on a

$$\mathcal{R}\{\Delta f(\mathbf{x})\} = \square \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$$

3.7 Dérivées de la TR

Étant donnée une fonction $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, il s'agit de trouver une relation entre la TR de $f(\mathbf{x})$ et les dérivées de sa TR $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$ par rapport aux variables ξ_k : Partant de la définition de la TR,

$$\mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} = \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.21)$$

et définissant,

$$\frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} = \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.22)$$

on obtient facilement la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} &= \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \int f(\mathbf{x}) \left[-x_k \frac{\partial}{\partial r} \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \right] \, d\mathbf{x} \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\int x_k f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R} \{x_k f(\mathbf{x})\}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R} \{f(\mathbf{x})\} = \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R} \{x_k f(\mathbf{x})\} \tag{3.24}$$

et

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R} \{(\mathbf{a}^t \mathbf{x}) f(\mathbf{x})\} \tag{3.25}$$

De même on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \mathcal{R} \{f(\mathbf{x})\} = \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l \partial \xi_k} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{R} \{x_l x_k f(\mathbf{x})\} \tag{3.26}$$

et

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l a_k \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l \partial \xi_k} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{R} \{(\mathbf{a}^t \mathbf{x})(\mathbf{b}^t \mathbf{x}) f(\mathbf{x})\} \tag{3.27}$$

3.8 Convolution

Soient g et h deux fonctions, \tilde{g} et \tilde{h} leur TR, et f le produit de convolution de g et h ,

$$f(\mathbf{x}) = g * h = \int g(\mathbf{y}) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \tag{3.28}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{R} \{f(\mathbf{x})\} = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \\
&= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int d\mathbf{x} h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

En effectuant le changement de variable $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) &= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int d\mathbf{z} h(\mathbf{z}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{z}) \\
&= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \tilde{h}(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \\
&= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{h}(r - s, \boldsymbol{\xi}) \delta(s - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{y}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{h}(r - s, \boldsymbol{\xi}) \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \delta(s - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{y}) \\
&= \int \tilde{h}(r - s, \boldsymbol{\xi}) \tilde{g}(s, \boldsymbol{\xi}) ds = \tilde{g} * \tilde{h} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

d'où le résultat fort intéressant qui dit que la TR du produit de convolution de deux fonctions à n variables est le produit de convolution (par rapport à la seule variable r de la TR) de leurs TR respectives.

On constate aussi la différence entre la TR et la TF du produit de convolution de deux fonctions. En effet la TF du produit de convolution de deux fonctions est le produit simple de leurs TF, tandis que la TR du produit de deux fonctions est le produit de convolution de leurs TR.

3.9 TR des fonctions avec polynomes de Hermite

Les fonctions de Hermite sont définies par la formule de Rodrigues :

$$H_k(t) = (-1)^k \exp[t^2] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \left(\exp[-t^2] \right)$$

Utilisant cette formule avec $t^2 = x^2 + y^2$ on a

$$\begin{aligned}
H_k(x) H_l(y) \exp[-(x^2 + y^2)] &= (-1)^{k+l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^l \exp[-(x^2 + y^2)], \\
& \quad k, l = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Utilisant

$$\mathcal{R} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^l f(x, y) \right\} = \xi_1^k \xi_2^l \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{k+l} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$$

avec $f(x, y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} \left\{ H_k(x) H_l(y) \exp[-(x^2 + y^2)] \right\} &= (-1)^{k+l} \xi_1^k \xi_2^l \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{k+l} \sqrt{\pi} \exp[-r^2] \\
&= \sqrt{\pi} \xi_1^k \xi_2^l H_{k+l}(r) \exp[-r^2] \\
&= \sqrt{\pi} (\cos \phi)^k (\sin \phi)^l \exp[-r^2] H_{k+l}(r)
\end{aligned}$$

On peut généraliser ceci au cas des variables normalisées :

$$\mathcal{R} \left\{ H_k(\lambda x) H_l(\lambda y) \exp \left[-\lambda^2 (x^2 + y^2) \right] \right\} = (\cos \phi)^k (\sin \phi)^l \exp \left[-\lambda^2 r^2 \right] H_{k+l}(\lambda r)$$

En définissant

$$\mathcal{H}_{kl}(\lambda x + \lambda y) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} H_k(\lambda x) H_l(\lambda y)$$

on a

$$\mathcal{R} \left\{ \mathcal{H}_{kl}(\lambda x, \lambda y) \exp \left[-\lambda^2 (x^2 + y^2) \right] \right\} = (\cos \phi)^k (\sin \phi)^l \exp \left[-\lambda^2 r^2 \right] H_{k+l}(\lambda r)$$

3.10 TR des fonctions avec polynomes de Laguerre

Les fonctions de Laguerre sont définies par :

$$L_k^l(t) = \frac{1}{k!} t^{-l} \exp[t] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \left(t^{l+k} \exp[-t] \right)$$

Utilisant cette formule avec $t^2 = x^2 + y^2$ on peut établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left\{ \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2} \exp[\pm j l \theta] L_k^l(x^2 + y^2) \exp \left[-(x^2 + y^2) \right] \right\} \\ = \left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}} \exp[\pm j l \phi] \exp \left[-r^2 \right] H_{l+2k}(r) \end{aligned}$$

où on a utilisé

$$(x \pm jy)^l = (x^2 + y^2)^{1/2} \exp[\pm j l \theta].$$

On peut généraliser ceci au cas des variables normalisées :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left\{ \frac{(-1)^k \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} \left[\lambda^2 (x^2 + y^2) \right]^{1/2} \exp[\pm j l \theta] L_k^l \left[\lambda^2 (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-\lambda^2 (x^2 + y^2) \right] \right\} \\ = \left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}} \exp[\pm j l \phi] \exp \left[-\lambda^2 r^2 \right] H_{l+2k}(\lambda r) \end{aligned}$$

Si on définit un polynôme complexe

$$\mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) = \frac{(-1)^k \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} \left[\lambda^2 (x^2 + y^2) \right]^{1/2} \exp[\pm j l \theta] L_k^l \left[\lambda^2 (x^2 + y^2) \right]$$

et si on note

$$N_k^l = \left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}}$$

alors on a

$$\mathcal{R} \left\{ \mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) \exp \left[-\lambda^2 (x^2 + y^2) \right] \right\} = N_k^l \exp[\pm j l \phi] \exp \left[-\lambda^2 r^2 \right] H_{l+2k}(\lambda r) \quad (3.31)$$

Notons la propriété suivante :

$$\left[\mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) \right]^* = \mathcal{L}_{l+2k}^{\mp l}(\lambda x, \lambda y), \quad l \geq 0 \quad (3.32)$$

3.11 TR des fonctions avec polynomes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont définies par :

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^l (t^2 - 1)^l$$

et les polynômes de Legendre généralisée sont définies par :

$$P_l^m(t) = \frac{1}{2^l l!} (1 - t^2)^{m/2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{l+m} (t^2 - 1)^l, \quad m = 0, \dots, l.$$

Ces polynômes sont reliés aux fonctions sphéroidales harmoniques par

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \exp[jm\phi], \quad m = 0, \dots, l.$$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi)$$

et

$$\langle Y_{lm}(\theta, \phi), Y_{l'm'}(\theta, \phi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

L'intérêt de ces fonctions est de pouvoir établir des relations entre les TR des fonctions

$$x^k y^l \exp[-x^2 - y^2], \quad \mathcal{H}_{kl}(x, y) \exp[-x^2 - y^2], \quad \mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(x, y) \exp[-x^2 - y^2],$$

en sachant que les fonctions $\mathcal{P}_{kl}(x, y) = x^k y^l$, $\mathcal{H}_{kl}(x, y)$ et $\mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(x, y)$ forment une base complète.

3.12 TR des fonctions harmoniques circulaires

Considérons le cas d'une fonction à deux variables $f(x, y)$ qui a la propriété suivante :

$$f(x, y) = f(\rho, \theta) = g_l(\rho) \exp[jl\theta].$$

Il est alors facile de montrer que sa TR est de la forme

$$\tilde{f}(r, \phi) = \check{g}_l(r) \exp[jl\phi]$$

et qu'il y a une relation entre $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ de la forme :

$$\begin{cases} \check{g}_l(r) &= 2 \int_r^\infty g_l(\rho) T_l \left(\frac{r}{\rho} \right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right)^{-1/2} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{-1}{\pi r} \int_\rho^\infty \check{g}_l(r) T_l \left(\frac{r}{\rho} \right) \left(\frac{r^2}{\rho^2} - 1 \right)^{-1/2} dr \end{cases}$$

où T_l sont les polynômes de Tchebycheff.

Pour $l = 0$ on retrouve la transformé d'Abel

$$\begin{cases} \check{g}_0(r) &= 2 \int_r^\infty \rho g_0(\rho) (\rho^2 - r^2)^{-1/2} d\rho \\ g_0(\rho) &= \frac{-1}{\pi} \int_r^\infty \check{g}'_0(r) (\rho^2 - r^2)^{-1/2} dr \end{cases}$$

3.13 TR des fonctions harmoniques sphériques

Considérons le cas d'une fonction à trois variables $f(x,y,z)$ qui a la propriété suivante :

$$f(x,y,z) = f(\rho,\theta,\phi) = g_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi).$$

Il est alors facile de montrer que sa TR est de la forme

$$\tilde{f}(r,\xi) = \check{g}_l(r)Y_{lm}(\Theta,\Phi)$$

où (Θ,Φ) et ξ représentent le même vecteur unitaire. Il y a alors une relation entre $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ de la forme :

$$\check{g}_l(r) = 2\pi \int_r^\infty \rho g_l(\rho) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho$$

$$g_l(\rho) = \frac{1}{2\pi r} \int_\rho^\infty \frac{\partial^2}{\partial r^2} \check{g}_l(r) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) dr$$

où les P_l sont les polynômes de Legendre.

Dans le domaine de la propagation des ondes on a souvent affaire avec des fonctions à quatre variables $f(x,y,z,t)$ représentant une composante d'une onde qui se propage. Si $f(x,y,z,t)$ a la propriété suivante :

$$f(x,y,z,t) = f(\rho,\theta,\phi,t) = g_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi,t).$$

Il est alors facile de montrer que sa TR est de la forme

$$\tilde{f}(r,\xi) = \check{g}_l(r)Y_{lm}(\Theta,\Phi)$$

où (Θ,Φ) et ξ représentent le même vecteur unitaire. Il y a alors une relation entre $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ de la forme :

$$\check{g}_l(r) = 2\pi \int_r^\infty \rho g_l(\rho) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho$$

$$g_l(\rho) = \frac{1}{2\pi r} \int_\rho^\infty \frac{\partial^2}{\partial r^2} \check{g}_l(r) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) dr$$

où les P_l sont les polynômes de Legendre.

3.14 Résumé du chapitre

$$\begin{array}{ll}
f(\mathbf{x}) & \boxed{\text{TR}} \quad \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \\
c_1 f_1(\mathbf{x}) + c_2 f_2(\mathbf{x}) & c_1 \tilde{f}_1(r, \boldsymbol{\xi}) + c_2 \tilde{f}_2(r, \boldsymbol{\xi}) \\
f(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}) & \det \{\mathbf{A}\} \tilde{f}(r, \mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}) = \frac{\det \{\mathbf{A}\}}{|\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}|} \tilde{f} \left(\frac{r}{|\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}|}, \frac{\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{A}^t \boldsymbol{\xi}|} \right) \\
f(c\mathbf{x}) & \frac{1}{c^n} \tilde{f}(r, \frac{\boldsymbol{\xi}}{c}) = \frac{1}{c^{n-1}} \tilde{f}(cr, \boldsymbol{\xi}) \\
f(\mathbf{x} \pm \mathbf{a}) & \tilde{f}(r \pm \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}) \\
f(\mathbf{x}) = g * h = \int g(\mathbf{y}) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} & \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{g} * \tilde{h} = \int \tilde{g}(s, \boldsymbol{\xi}) \tilde{h}(r - s, \boldsymbol{\xi}) ds
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\tilde{f}(sr, s\boldsymbol{\xi}) & = \frac{1}{|s|} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \\
\tilde{f}(-r, -\boldsymbol{\xi}) & = \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \\
\tilde{f}(sr, \boldsymbol{\xi}) & = s \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
f(x, y) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \\
\text{Dérivée :} & \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad \qquad \qquad \xi_k \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} \\
\text{Gradient :} & \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^t \qquad \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} [\xi_1, \dots, \xi_n]^t \\
& \mathbf{a}^t \nabla f = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad \mathbf{a}^t \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} \\
\text{Dérivée seconde :} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \qquad \xi_l \xi_k \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2} \\
\text{Laplacienne :} & \Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2} \\
& \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \qquad (\mathbf{a}^t \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{b}^t \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
f(x,y) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow & \tilde{f}(r,\phi) \\
H_k(x)H_l(y) \exp [-(x^2 + y^2)] & & \sqrt{\pi}(\cos \phi)^k(\sin \phi)^l \exp [-r^2] H_{k+l}(r) \\
H_k(\lambda x)H_l(\lambda y) \exp [-\lambda^2(x^2 + y^2)] & & (\cos \phi)^k(\sin \phi)^l \exp [-\lambda^2 r^2] H_{k+l}(\lambda r)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
f(\rho,\theta) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow & \tilde{f}(r,\phi) \\
g_l(\rho) \exp [jl\theta] & & \check{g}_l(r) \exp [jl\phi] \\
& & \text{avec } \check{g}_l(r) \text{ Transformée de Tchebycheff de } g_l(\rho). \\
B_s^l(r,\theta) = Z_{|l|+2s}^{|l|}(r) \exp [jl\theta] & & \frac{2}{|l| + 2s + 1} \sqrt{1 - r^2} U_{|l|+2s}(r) \exp [jl\phi]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
f(\rho,\theta,\phi) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow & \tilde{f}(r,\Theta,\Phi) \\
g_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi) & & \check{g}_l(r)Y_{lm}(\Theta,\Phi)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
f(\rho,\theta,\phi,t) & \longrightarrow \boxed{\text{TR}} \longrightarrow & \tilde{f}(r,\Theta,\Phi,t) \\
g_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi,t) & & \check{g}_l(r)Y_{lm}(\Theta,\Phi,t)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
f(\rho,\theta) \\
\downarrow \\
\boxed{\text{TR}} \\
\downarrow \\
\tilde{f}(r,\phi)
\end{array}$$

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} \rho \exp [\pm jl\theta] L_k^l(\rho^2) \exp [-\rho^2]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}} \exp [\pm jl\phi] \exp [-r^2] H_{l+2k}(r)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(-1)^k \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} \lambda \rho \exp [\pm jl\theta] L_k^l(\lambda^2 \rho^2) \exp [-\lambda^2 \rho^2]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}} \exp [\pm jl\phi] \exp [-\lambda^2 r^2] H_{l+2k}(\lambda r)$$

Chapitre 4

Relation avec d'autres transformées

4.1 Introduction

Le principal objectif de ce chapitre est de présenter un certain nombre de relations qui lient la TR d'une fonction à sa TF. Ce lien est très important lorsque, dans le chapitre suivant, nous aborderons l'inversion de la TR.

De même en étudiant la TR d'un certain nombre de fonctions avec les propriétés spécifiques comme la symétrie cylindrique ou sphérique on retrouve des liens entre la TR et d'autres transformations linéaires comme les transformée d'Abel, de Legendre, de Tchbycheff, de Gegenbauer, etc.

4.2 Relation avec la transformée de Fourier

Désignons par $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^t$ un vecteur dans \mathbb{R}^n , et $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_n]^t$ un vecteur dans l'espace de Fourier correspondant. La TF d'une fonction $f(\mathbf{x})$ et son inverse sont définies par

$$\begin{cases} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) &= \mathcal{F}_n \{f\} = \int f(\mathbf{x}) \exp[-j\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}] \, d\mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}_n^{-1} \{\hat{f}\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \exp[+j\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}] \, d\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (4.1)$$

Pour trouver la relation entre la TF et la TR, on note que l'on peut écrire

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int f(\mathbf{x}) \exp[-jt] \delta(t - \boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dt \quad (4.2)$$

où t est une variable réelle. Considérons maintenant les relations suivantes

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad t = \Omega r \quad (4.3)$$

où Ω est une variable réelle et $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur unitaire dans \mathbb{R}^n . On a ainsi

$$\begin{aligned} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{f}(\Omega\boldsymbol{\xi}) &= |\Omega| \int_{-\infty}^{+\infty} \int f(\mathbf{x}) \exp[-j\Omega r] \delta(\Omega r - \Omega\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-j\Omega r] \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \exp[-j\Omega r] \, dr \end{aligned} \quad (4.4)$$

L'équation 4.4 établit la relation fondamentale (théorème de Radon) entre la TF et la TR d'une fonction. Notons que la partie droite de cette équation est la TF 1-D par rapport à la variable radiale r de $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$. Si on désigne symboliquement cette transformation par \mathcal{F}_1 on a

$$\hat{f} = \mathcal{F}_n \{f\} = \mathcal{F}_1 \{ \tilde{f} \} = \mathcal{F}_1 \{ \mathcal{R} \{f\} \} \quad (4.5)$$

$$\tilde{f} = \mathcal{R} \{f\} = \mathcal{F}_1^{-1} \{ \hat{f} \} = \mathcal{F}_1^{-1} \{ \mathcal{F}_n \{f\} \} \quad (4.6)$$

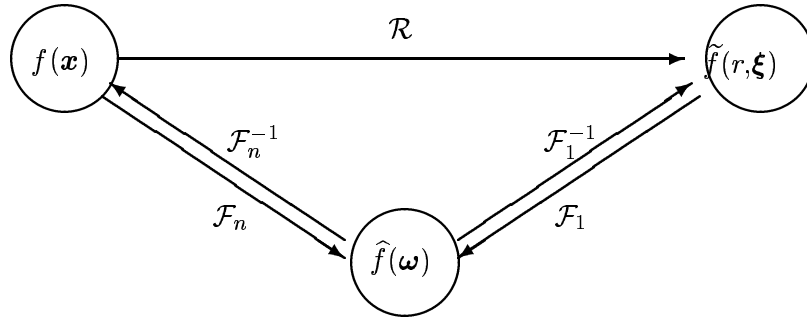


FIG. 4.1 – Relation entre une fonction, sa transformée de Radon R , et sa transformée de Fourier F en dimension n .

Ces relations sont symbolisées par les diagrammes des figures 4.2 et 4.2. Cependant il faut remarquer que, bien que ce théorème soit identique au théorème des projections pour des fonctions opérant dans un espace à 2-D, ils ne sont pas identiques dans des espaces de dimensions supérieures à deux. Le *théorème des projections* relie la TF à $(n-1)$ -D d'une projection p (dans un espace à $(n-1)$ -D) de la fonction à n variables d'espace f à la TF à n -D de f ; tandis que le théorème de Radon relie la TF à 1-D (par rapport à la variable radiale r) de $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$ à la TF à n -D de $f(\mathbf{x})$.

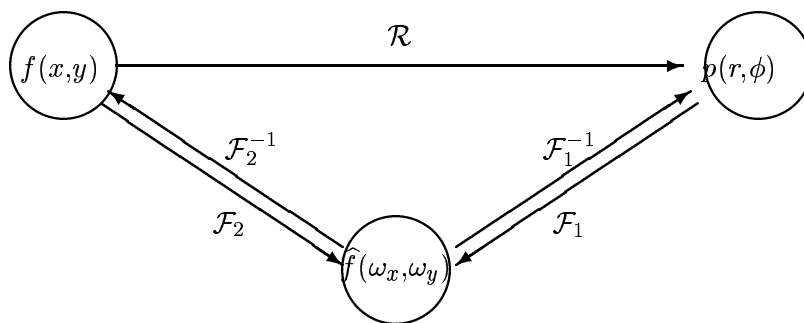


FIG. 4.2 – Relation entre une fonction, sa transformée de Radon R , et sa transformée de Fourier F en dimension 2.

4.3 Relation avec la transformée de Hough

La transformée de Hough (TH) est un outil utilisé en analyse d'image pour la détection des lignes droites dans une image. Une extension de cette transformée est aussi utilisée pour la détection des contours des formes géométriques spécifiques dans une image. La transformée de Hough transforme une ligne droite dans une image de coordonnées (x,y) définie par $r = x \cos \phi + y \sin \phi$ en un point dans une autre image de coordonnées (r,ϕ) . Le lien entre la TR et la TH est ainsi évident si on considère une fonction $f(x,y)$ comme l'image de départ et $\tilde{f}(r,\phi)$ comme l'image d'arrivée.

A COMPLETER

4.4 Relation avec la transformée de Gegenbauer

La TR préserve les propriétés de séparabilités dans des coordonnées cylindriques $f(x,y) = f(\rho,\theta) = g_l(\rho)S_l(\theta)$, ou sphériques $f(x,y,z) = f(\rho,\theta,\phi) = g_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi)$. Ceci veut dire que

$$f(x,y) = f(\rho,\theta) = g_l(\rho)S_l(\theta) \longrightarrow \tilde{f}(r,\phi) = \check{g}_l(r)S_l(\phi)$$

$$f(x,y,z) = f(\rho,\theta,\phi) = g_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi) \longrightarrow \tilde{f}(r,\Theta,\Phi) = \check{g}_l(r)\check{Y}_{lm}(\theta,\phi)$$

Mais, pour certaines fonctions $S_l(\theta)$ ou $Y_{lm}(\theta,\phi)$ nous aurons en plus $\check{S}_l = S_l$ ou $\check{Y}_{lm} = Y_{lm}$. C'est le cas des fonctions harmoniques cylindriques en 2-D :

$$S_l(\theta) = \exp[jl\theta], l = 0, 1, 2, \dots$$

ou sphériques en 3-D :

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) \exp[jm\phi], \quad m = 0, \dots, l,$$

où P_l^m sont les polynômes de Legendre.

Dans le cas général de dimension n , $f(\mathbf{x})$ est une fonction séparable en ρ et $\boldsymbol{\omega}$, *i.e.*; on a

$$f(\mathbf{x}) = g_l(\rho)S_{lm}(\boldsymbol{\omega}),$$

avec

$$\rho = |\mathbf{x}|, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

et où

$$S_{l,-m}(\boldsymbol{\omega}) = (-1)^m S_{lm}^*(\boldsymbol{\omega})$$

et

$$\int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) S_{l'm'}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

avec

$$d\boldsymbol{\omega} = (\sin\theta_1)^{n-2} (\sin\theta_2)^{n-3} \dots (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\phi$$

où $(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi)$ correspondent aux coordonnées hypersphériques de dimension n . (Pour un rappel des liens entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées hypersphériques dans un espace de dimension n voir l'annexe C.)

Alors, sa TR $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$ est de la forme :

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \check{g}_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}),$$

et les deux fonctions $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ sont reliées par la transformée de Gegenbauer :

$$\begin{aligned}\check{g}_l(r) &= \frac{(4\pi)^\nu \Gamma(l+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(l+2\nu)} \int_r^\infty r^{2\nu} g_l(\rho) C_l^\nu\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{\nu-1/2} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{(-1)^{2\nu+1} \Gamma(l+1)\Gamma(\nu)}{2\pi^{\nu+1} \Gamma(l+2\nu) \rho} \int_\rho^\infty \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) C_l^\nu\left(\frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1\right)^{\nu-1/2} dr \\ r &\geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^{(2\nu+1)} \check{g}_l(r)\end{aligned}$$

En résumé, si

$$f(\mathbf{x}) = g_l(\rho) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \longrightarrow \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \check{g}_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\xi})$$

Examinons maintenant ce résultat dans les cas spécifiques $n=2, 3$ et 4 .

Cas $n = 2$:

$$f(x, y) = f(\rho, \theta) = g_l(\rho) \exp[jl\theta] \longrightarrow \tilde{f}(r, \phi) = \check{g}_l(r) \exp[jl\phi]$$

La relation entre $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ se réduit à la transformée de Tchebycheff de première espèce :

$$\begin{cases} \check{g}_l(r) = 2 \int_r^\infty g_l(\rho) T_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{-1/2} d\rho \\ g_l(\rho) = \frac{-1}{\pi r} \int_\rho^\infty \check{g}_l'(r) T_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r^2}{\rho^2} - 1\right)^{-1/2} dr \end{cases}$$

où T_l sont les polynômes de Tchebycheff.

Cas $n = 3$:

$$f(x, y, z) = f(\rho, \theta, \phi) = g_l(\rho) S_{lm}(\theta, \phi) \longrightarrow \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \check{g}_l(r) S_{lm}(\Theta, \Phi)$$

La relation entre $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ se réduit à la transformée de Legendre :

$$\begin{aligned}\check{g}_l(r) &= 2\pi \int_r^\infty \rho g_l(\rho) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{1}{2\pi r} \int_\rho^\infty \frac{\partial^2}{\partial r^2} \check{g}_l(r) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) dr\end{aligned}$$

où les P_l sont les polynômes de Legendre.

Cas $n = 4$: Les problèmes de dimensions quatre se rencontre lors de l'étude des molécules biatomique.

$$f(x, y, z, w) = g_l(\rho) S_{lm}(\theta_1, \theta_2, \phi) \longrightarrow \tilde{f}(r, \phi) = \check{g}_l(r) S_{lm}(\Theta_1, \Theta_2, \Phi)$$

La relation entre $g_l(\rho)$ et $\check{g}_l(r)$ se réduit à la transformée de Tchebycheff de deuxième espèce :

$$\begin{cases} \check{g}_l(r) &= \frac{4\pi}{l+1} \int_r^\infty \rho^2 g_l(\rho) U_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{-1}{2\pi^2(l+1)\rho} \int_\rho^\infty \frac{d}{dr} \check{g}_l(r) U_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r^2}{\rho^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dr \end{cases}$$

Chapitre 5

Inversion analytique

5.1 Introduction

Depuis J. Radon, un très grand nombre de travaux ont été consacrés à l'établissement d'une formule d'inversion pour la TR. Le principal objectif de ce chapitre est de présenter les différentes expressions analytiques que l'on peut obtenir pour l'inversion de la TR.

Nous nous limiterons à fournir seulement ces différentes expressions sans démonstration. Pour les démonstrations les références seront fournies.

Notons que l'existence de ces différentes expressions montre à quel point l'inversion pratique de cette transformée peut être importante.

Dans ce chapitre, tout d'abord, nous définissons un ensemble de transformations sous forme d'opérateurs qui faciliteront la présentation de ces différentes expressions pour l'inversion de la TR. Ensuite nous considérons deux cas : l'inversion dans un espace à dimension paire et l'inversion dans un espace à dimension impaire. Les cas de la TR 2-D et 3-D sont plus particulièrement explicités.

5.2 Préparatifs

Un résumé synthétique des différentes expressions pour l'inversion de la TR peut être obtenue en utilisant les notations qui suivent.

Considérons les fonctions $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x})$, $p(r, \boldsymbol{\xi})$, $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$, $\hat{p}(\Omega, \boldsymbol{\xi})$, $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$, $\tilde{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi})$ et $p_H(r, \boldsymbol{\xi})$ et définissons les opérateurs suivantes :

– Laplacienne dans l'espace objet \mathbf{x} :

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(\mathbf{x}), \quad \Delta^m f = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^m f(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

– Dérivée seconde dans l'espace transformée $(r, \boldsymbol{\xi})$:

$$\square p = \frac{\partial^2}{\partial r^2} p(r, \boldsymbol{\xi}), \quad \square^m p = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)^m p(r, \boldsymbol{\xi}) \quad (5.2)$$

– TF n -D dans l'espace objet \mathbf{x} :

$$\begin{cases} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) &= \mathcal{F}_n \{f\} = \int f(\mathbf{x}) \exp[-j\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}] d\mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}_n^{-1} \{\hat{f}\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \exp[+j\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}] d\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (5.3)$$

– TF 1-D dans l'espace transformée $(r, \boldsymbol{\xi})$ par rapport à la variable r :

$$\begin{cases} \hat{p}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{F}_1 \{p\} = \int p(r, \boldsymbol{\xi}) \exp[-j\Omega r] dr \\ p(r, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{F}_1^{-1} \{\hat{p}\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int \hat{p}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \exp[+j\Omega r] d\Omega \end{cases} \quad (5.4)$$

– Transformée de Radon :

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{R} \{f\} = \int f(\mathbf{x}) \delta(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.5)$$

– Transformée adjoint de la TR :

$$g(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^\dagger \{p\} = \int_{|\boldsymbol{\xi}=1|} p(r, \boldsymbol{\xi})|_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \quad (5.6)$$

– Opérateur de rétroprojection :

$$b(\mathbf{x}) = \mathcal{B} \{p\} = \frac{1}{2} \mathcal{R}^\dagger \{p\} = \frac{1}{2} \int_{|\boldsymbol{\xi}=1|} p(r, \boldsymbol{\xi})|_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \quad (5.7)$$

– Opérateur de rétroprojection ponctuelle :

$$b_\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_\phi p = p(r, \boldsymbol{\xi})|_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} = p(\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (5.8)$$

– TF 1-D de la TR :

$$\begin{cases} \hat{\tilde{f}}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{F}_1 \{\tilde{f}\} = \int \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \exp[-j\Omega r] dr \\ \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{F}_1^{-1} \{\hat{\tilde{f}}\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int \hat{\tilde{f}}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \exp[+j\Omega r] d\Omega \end{cases} \quad (5.9)$$

– Transformée de Hilbert :

$$\begin{cases} g_H(t) &= \mathcal{H}\{g\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(r)}{r-t} dr = \frac{1}{\pi} g(r) * \frac{1}{r} \\ g(r) &= \mathcal{H}^{-1}\{g\} = \frac{-j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_H(t)}{r-t} dt = \frac{j}{\pi} g_H(t) * \frac{1}{t} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$p_H(r = \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}) = \mathcal{H} \{p(r, \boldsymbol{\xi})\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(r, \boldsymbol{\xi})}{r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} dr \quad (5.11)$$

– un opérateur spécifique :

$$\bar{g}(r) = \mathcal{D}\{g\} = \begin{cases} C_n \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1} g(r) = C_n \square^{(n-1)/2} g(r) & n \text{ impair} \\ -jC_n \mathcal{H} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1} g(r) \right\} & n \text{ pair} \end{cases} \quad (5.12)$$

5.3 Inversion directe en dimensions impaires

5.3.1 Cas général

Dans ce cas $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, n = 2k+1, k = 1, 2, \dots$ et on a $\Delta^{(n+1)/2} = \Delta^{(n-1)/2} \Delta$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

L'utilisation d'une identité due à Courant et à Hilbert (1962)

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{(n-1)/2} f(\mathbf{x}) = \Delta^{(n+1)/2} \left\{ \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} d\boldsymbol{\xi} \int d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \right\}, \quad (5.13)$$

valable pour $n \geq 3$ permet d'établir les relations suivantes :

$$f(\mathbf{x}) = C_n \Delta^{(n-1)/2} \left\{ \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} [\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})]_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \right\} \quad (5.14)$$

$$f(\mathbf{x}) = C_n \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n-1} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \right]_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \quad (5.15)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{(n-1)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(j2\pi)^{(n-1)}} \quad (5.16)$$

5.3.2 Cas 3-D

pour $n = 3$ on a $\mathbf{x} = [x, y, z]^t, \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^t = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]^t$, $d\boldsymbol{\xi} = \sin \theta d\theta d\phi$, $C_3 = \frac{-1}{8\pi^2}$, et

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{8\pi^2} \Delta \left\{ \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} [\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})]_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \right\} \\ &= \frac{-1}{8\pi^2} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \right]_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (5.17)$$

ce qui d'une manière explicite donne

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{-1}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left\{ \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \tilde{f}(\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right\} \\ &= \frac{-1}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &\quad \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right\} \\ &= \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{f}(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \frac{-1}{8\pi^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r^2}$$

$$f(x, y, z) = \mathcal{B} \{ \tilde{f} \} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

$$f(x, y, z) \longrightarrow \boxed{\mathcal{R}} \longrightarrow \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$$

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \longrightarrow \boxed{\frac{-1}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}} \longrightarrow \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \longrightarrow \boxed{\mathcal{B}} \longrightarrow f(x, y, z)$$

5.4 Inversion directe en dimensions paires

5.4.1 Cas général

Dans ce cas $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, n = 2k, k = 1, 2, \dots$. La démarche est la même que celle du paragraphe précédent, sauf qu'ici une autre identité est utilisée :

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}) = \Delta^{n/2} \left\{ \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} d\boldsymbol{\xi} \int d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \ln |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \right\}, \quad (5.19)$$

qui est valable pour $n \geq 2$ et qui permet d'établir les relations suivantes :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C_n}{j\pi} \Delta^{(n-2)/2} \left\{ \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} d\boldsymbol{\xi} \int dr \frac{\frac{\partial}{\partial r} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x})} \right\} \quad (5.20)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C_n}{j\pi} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} d\boldsymbol{\xi} \int dr \frac{\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x})} \quad (5.21)$$

5.4.2 Cas 2-D

Pour $n = 2$ on a $\mathbf{x} = [x, y]^t, \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^t = [\cos \phi, \sin \phi]^t$ et $d\boldsymbol{\xi} = d\phi$, $C_2 = \frac{1}{2\pi}$, et

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r}}{(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x})} dr \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi^2}\right) \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r}}{(r - \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x})} dr \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi^2}\right) \int_0^\pi \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})}{\partial r} \right\} d\phi \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r,\phi) &= \frac{-1}{2\pi^2} \frac{\partial \tilde{f}(r,\phi)}{\partial r} \\ g(r,\phi) &= \mathcal{H} \left\{ \tilde{f}(r,\phi) \right\} = \int \frac{\tilde{f}(r,\phi)}{(r - x \cos \phi - y \sin \phi)} dr \\ f(x,y) &= \mathcal{B} \{g(r,\phi)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi g(r,\phi) d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &\longrightarrow \boxed{\mathcal{R}} \longrightarrow \tilde{f}(r,\phi) \\ \tilde{f}(r,\phi) &\longrightarrow \boxed{\frac{-1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial r}} \longrightarrow \tilde{f}(r,\phi) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow g(r,\phi) \longrightarrow \boxed{\mathcal{B}} \longrightarrow f(x,y) \end{aligned}$$

En effectuant les changement de variables $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, on obtient la relation d'inversion dans des coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$f(\rho, \theta) = \left(-\frac{1}{2\pi^2} \right) \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dr \frac{\frac{\partial}{\partial r} \tilde{f}(r, \phi)}{(r - \rho \cos(\phi - \theta))} \quad (5.23)$$

Ces expressions analytiques ne sont utilisées que rarement car c'est seulement pour certaines fonctions qui ont des propriétés de symétrie de révolution autour d'un axe ou autour d'un point que l'on peut calculer analytiquement ces intégrales. La discrétisation directe et le calcul numérique de ces intégrales fournissent des résultats très sensibles aux erreurs numériques.

5.5 Inversion utilisant la rétroprojection

L'opération de rétroprojection est lié à l'opérateur adjoint \mathcal{R}^\dagger de l'opérateur de la transformation de Radon \mathcal{R} qui est défini dans sa généralité par

$$\mathcal{R}^\dagger p = \int_{|\xi|=1} p(r, \xi) \Big|_{r=\xi^t \mathbf{x}} d\xi \quad (5.24)$$

où

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathcal{R}^\dagger p \rangle = \langle \mathcal{R} f, p(r, \xi) \rangle. \quad (5.25)$$

Si on note par $\tilde{f}(r, \xi) = \mathcal{R} f$ et par $g(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^\dagger p$ et par

$$\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle = \int f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.26)$$

$$\langle \tilde{f}(r, \xi), p(r, \xi) \rangle = \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dr \tilde{f}(r, \xi) p(r, \xi) \quad (5.27)$$

on a

$$\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle = \langle \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}), p(r, \boldsymbol{\xi}) \rangle. \quad (5.28)$$

Si on définit

$$b(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^\dagger \tilde{f} = \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})|_{r=\boldsymbol{\xi}^t \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi}, \quad (5.29)$$

il est intéressant d'étudier les liens qui existent entre $f(\mathbf{x})$ et $b(\mathbf{x})$. Pour ceci on utilise les opérateurs définis en introduction et on montre facilement les relations suivantes :

$$\mathcal{R}^\dagger \mathcal{D} \mathcal{R} = \mathcal{I} \longrightarrow f = \mathcal{R}^\dagger \mathcal{D} \mathcal{R} f \quad (5.30)$$

$$\mathcal{D} \mathcal{R} \mathcal{R}^\dagger = \mathcal{I} \longrightarrow p = \mathcal{D} \mathcal{R} \mathcal{R}^\dagger p \quad (5.31)$$

– Pour n impaire on a

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= C_n \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} b(\mathbf{x}) = C_n \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \mathcal{R}^\dagger \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \\ &= C_n \mathcal{R}^\dagger \left(\square^{(n-1)/2} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$b(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int \frac{f(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (5.33)$$

– Pour $n = 3$ on a

$$f(x, y, z) = - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) b(x, y, z) \quad (5.34)$$

$$b(x, y, z) = 2\pi \iiint \frac{f(x, y, z)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} dx' dy' dz' \quad (5.35)$$

$$b(x, y, z) = f(x, y, z) * \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (5.36)$$

ou encore

$$b(\rho, \theta, \phi) = f(\rho, \theta, \phi) * \frac{1}{\rho} \quad (5.37)$$

– Pour $n = 2$ on a

$$f = \frac{-1}{4\pi} \mathcal{R}^\dagger \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{R} f}{\partial r} = \frac{-1}{4\pi} \mathcal{R}^\dagger \mathcal{H} \frac{\partial \tilde{f}(r, \phi)}{\partial r} \quad (5.38)$$

$$b(x, y) = \frac{1}{2} \iint \frac{f(x, y, z)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}} dx' dy' \quad (5.39)$$

$$b(x, y) = f(x, y) * \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}} \quad (5.40)$$

ou encore

$$b(\rho, \theta) = f(\rho, \theta) * \frac{1}{\rho} \quad (5.41)$$

5.6 Inversion dans le domaine de Fourier

Une autre formulation pour l'inversion de la TR peut être obtenue à partir de la relation qui existe entre la TF et la TR, c'est à dire

– Cas général:

$$\mathcal{F}_n \{f\} = \mathcal{F}_1 \{\mathcal{R}\{f\}\} = \mathcal{F}_1 \{\tilde{f}\} \quad (5.42)$$

ou bien

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \tilde{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\Omega\boldsymbol{\xi}} \quad (5.43)$$

– Cas 3-D:

$$\mathcal{F}_3 \{f\} = \mathcal{F}_1 \{\mathcal{R}\{f\}\} = \mathcal{F}_1 \{\tilde{f}\} \quad (5.44)$$

ou d'une façon plus explicite

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \tilde{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \Big| \begin{cases} \omega_x = \Omega \cos \theta \sin \phi \\ \omega_y = \Omega \sin \theta \sin \phi \\ \omega_z = \Omega \cos \phi \end{cases} \quad (5.45)$$

Notons aussi la relation suivante pour $\phi = \pi/2$

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y, 0) = \tilde{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \Big| \begin{cases} \omega_x = \Omega \cos \theta \\ \omega_y = \Omega \sin \theta \\ \omega_z = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

– Cas 2-D:

$$\mathcal{F}_2 \{f\} = \mathcal{F}_1 \{\mathcal{R}\{f\}\} = \mathcal{F}_1 \{\tilde{f}\} \quad (5.47)$$

ou d'une façon plus explicite

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \tilde{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \Big| \begin{cases} \omega_x = \Omega \cos \phi \\ \omega_y = \Omega \sin \phi \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\tilde{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{f}(\Omega, \phi) = \int \tilde{f}(r, \phi) \exp[-j\Omega r] \, dr \quad (5.49)$$

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) \exp[-j(\omega_x x + \omega_y y)] \, dx \, dy \quad (5.50)$$

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \exp[+j(\omega_x x + \omega_y y)] \, d\omega_x \, d\omega_y \quad (5.51)$$

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \tilde{f}(\Omega, \phi) \quad \text{pour} \quad \omega_x = \Omega \cos \phi \quad \text{et} \quad \omega_y = \Omega \sin \phi \quad (5.52)$$

Notons cependant que le passage de $\widehat{f}(\Omega, \phi)$ à $\widehat{f}(\omega_x, \omega_y)$ nécessite un changement de variable dans le domaine de Fourier avant de pouvoir effectuer la TF inverse. Cela se traduit par la nécessité d'effectuer une interpolation lors d'une mise en oeuvre numérique par la TF discrète.

En effet dans une situation réelle on doit évidemment effectuer un calcul numérique sur machine pour lequel on ne dispose que d'un nombre fini de projections caractérisées par des directions définies par ϕ_j . Le remplissage du domaine de Fourier n'est donc pas dense, d'où la nécessité d'une interpolation pour passer de $\widehat{f}(\Omega, \phi)$ à $\widehat{f}(\omega_x, \omega_y)$.

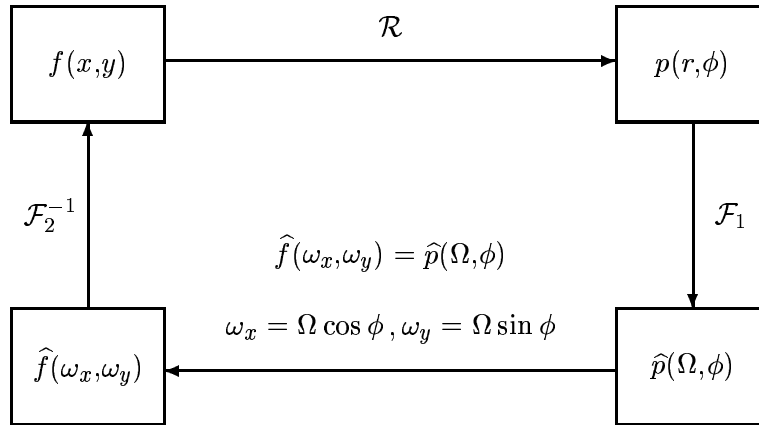


FIG. 5.1 – Transformée de Radon (TR): Inversion dans le domaine de Fourier.

5.7 Inversion par rétroprojection filtrée

Partant des définitions de l'opérateur de rétroprojection et la relation suivante

$$\mathcal{R}^\dagger \mathcal{D} \mathcal{R} = \mathcal{I} \longrightarrow f = \mathcal{R}^\dagger \mathcal{D} \mathcal{R} f \quad (5.53)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} f &= \mathcal{R}^\dagger \mathcal{D} \mathcal{R} f = 2\mathcal{B} \mathcal{D} \mathcal{R} f = 2\mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1 \mathcal{D} \mathcal{R} f \\ &= 2\mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1 \mathcal{D} \tilde{f} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Remplaçant maintenant pour la définition de l'opérateur \mathcal{D} on a

– En dimension impaire on a

$$f = 2C_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n-1} \tilde{f}(r, \xi) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} (j\Omega)^{n-1} \mathcal{F}_1 \left\{ \tilde{f}(r, \xi) \right\} \\
&= 2C_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} (j\Omega)^{n-1} \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \\
&= 2C_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ -|\Omega|^{n-1} \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \right\} \\
&= 2C_n \mathcal{B} \left\{ \bar{p}(r, \xi) \right\} \tag{5.55}
\end{aligned}$$

avec

$$\bar{p}(r, \xi) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ -|\Omega|^{n-1} \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \right\}$$

$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathcal{R} \{ \longrightarrow \} \tilde{f}(r, \xi)$					
$\tilde{f}(r, \xi)$	$\longrightarrow \mathcal{F} \{1\}$	$\longrightarrow \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi)$	$\longrightarrow \boxed{- \Omega ^{n-1}}$	$\longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \{1\}$	$\longrightarrow \bar{p}(r, \xi) \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow f(\mathbf{x})$

– Pour $n = 3$ on a

$$f = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega|^2 \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \mathcal{B} \bar{p}(r, \xi) \tag{5.56}$$

avec

$$\bar{p}(r, \xi) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega|^2 \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \right\}$$

$f(x, y, z) \longrightarrow \mathcal{R} \{ \longrightarrow \} \tilde{f}(r, \xi)$					
$\tilde{f}(r, \xi)$	$\longrightarrow \mathcal{F} \{1\}$	$\longrightarrow \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi)$	$\longrightarrow \boxed{ \Omega ^2}$	$\longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \{1\}$	$\longrightarrow \bar{p}(r, \xi) \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow f(x, y, z)$

– En dimension pair on a

$$\begin{aligned}
f &= -2jC_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1 \mathcal{H} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n-1} \left(\tilde{f}(r, \xi) * \frac{1}{r} \right) \right\} \\
&= -2jC_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} (j\Omega)^{n-1} \left(\frac{-j}{2} \text{sgn}(\Omega) \Omega \right) \mathcal{F}_1 \left\{ \frac{1}{r} \right\} \mathcal{F}_1 \left\{ \tilde{f}(r, \xi) \right\} \\
&= -2jC_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} (j\Omega)^{n-1} \left(\frac{-j}{2} \text{sgn}(\Omega) \right) \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \\
&= -jC_n \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega|^{n-1} \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \right\} \\
&= -\frac{j}{2} \frac{1}{(j2\pi)^{n-1}} \mathcal{B} \bar{p}(r, \xi) \tag{5.57}
\end{aligned}$$

avec

$$\bar{p}(r, \xi) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega|^{n-1} \widehat{\tilde{f}}(\Omega, \xi) \right\}$$

$$\begin{array}{c}
f(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathcal{R} \{ \longrightarrow \} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \\
\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) \longrightarrow \mathcal{F} \{1\} \longrightarrow \widehat{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \longrightarrow \boxed{|\Omega|^{n-1}} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \{1\} \longrightarrow \bar{p}(r, \boldsymbol{\xi}) \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow f(\mathbf{x})
\end{array}$$

- Pour $n = 2$ on a

$$f = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega| \widehat{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \right\} = \mathcal{B}\bar{p}(r, \boldsymbol{\xi}) \quad (5.58)$$

avec

$$\bar{p}(r, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega| \widehat{f}(\Omega, \boldsymbol{\xi}) \right\}$$

$$\begin{array}{c}
f(x, y) \longrightarrow \mathcal{R} \{ \longrightarrow \} p(r, \phi) \\
p(r, \phi) \longrightarrow \mathcal{F} \{1\} \longrightarrow \widehat{p}(\Omega, \phi) \longrightarrow \boxed{|\Omega|} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \{1\} \longrightarrow \bar{p}(r, \phi) \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow f(x, y)
\end{array}$$

Développons un peu plus en détail ce cas. L'opérateur de rétroprojection opère sur des projections $p(r, \phi)$, une fonction de deux variables $r \in \mathcal{R}$ et $\phi \in [0, \pi]$, et $r = x \cos \phi + y \sin \phi \forall x, y \in \mathcal{R}$.

L'opérateur de rétroprojection \mathcal{B} est défini par :

$$\mathcal{B} \{p\} (x, y) = \int_0^\pi p(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \quad (5.59)$$

En effectuant un changement de variables de coordonnées (x, y) aux coordonnées polaires (ρ, θ) , on obtient la relation suivante

$$\mathcal{B} \{p\} (\rho, \theta) = \int_0^\pi p(\rho \cos(\phi - \theta), \phi) d\phi \quad (5.60)$$

Si on définit

$$b(x, y) = \mathcal{B} \{p\} (x, y) \quad (5.61)$$

on a peut montrer facilement les relations suivantes

$$f(x, y) = - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) b(x, y) \quad (5.62)$$

$$b(x, y) = f(x, y) * \frac{1}{\rho} \quad (5.63)$$

On a alors les relations suivantes entre les opérateurs \mathcal{B} (rétroprojection), \mathcal{F}_1 (TF en 1-D), \mathcal{F}_2 (TF en 2-D) et \mathcal{R} (Radon):

$$\begin{aligned}
f &= \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega| \mathcal{F}_1 \left\{ \mathcal{R} \{f\} \right\} \right\} \right\} = \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega| \mathcal{F}_1 \left\{ \widehat{f} \right\} \right\} \right\} \\
&= \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\Omega| \widehat{f} \right\} \right\}
\end{aligned} \quad (5.64)$$

$$f = \mathcal{F}_2^{-1} \{ |\Omega| \mathcal{F}_2 \{ \mathcal{B} \{ \mathcal{R} \{ f \} \} \} \} = \mathcal{F}_2^{-1} \{ |\Omega| \mathcal{F}_2 \{ \mathcal{B} \{ \tilde{f} \} \} \} \quad (5.65)$$

L'équation (5.64) permet d'effectuer l'inversion en effectuant d'abord une opération de filtrage sur les projections et ensuite une opération de rétroprojection sur ces projections filtrées (Figure 5.7). Dans cette équation $\mathcal{F}_1^{-1} \{ |\Omega| \mathcal{F}_1 \{ \mathcal{R} \{ f \} \} \}$ est une opération de filtrage sur les projections effectuées dans le domaine de Fourier par un filtre dont la fonction de transfert est $H(\Omega) = |\Omega|$. L'opération de filtrage peut être effectuée soit dans le domaine de Fourier soit directement par une convolution. Le noyau de convolution est alors une fonction dont la TF est $|\Omega|$. Une telle fonction est une fonction singulière. C'est la raison pour laquelle dans une application pratique il faut l'approcher par une forme régularisée, par exemple par une fonction à bande limitée.

L'équation (5.65) permet d'effectuer l'inversion en effectuant d'abord l'opération de rétroprojection sur les projections mêmes, et ensuite l'opération de filtrage en 2-D sur l'image ainsi obtenue, c'est à dire:

$$b(x,y) = \mathcal{B} \{ \tilde{f}(r,\phi) \} = \int_0^\pi \tilde{f}(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \quad (5.66)$$

$$f(x,y) = \mathcal{F}_2^{-1} \{ |\Omega| \mathcal{F}_2 \{ b(x,y) \} \} \quad (5.67)$$

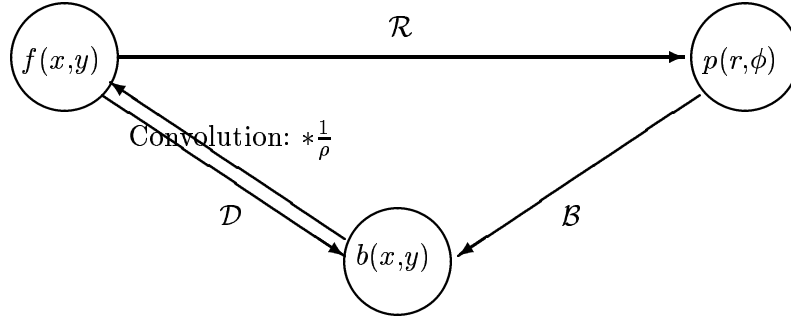


FIG. 5.2 – *Transformée de Radon (TR): Inversion par rétroprojection.*

Ici aussi l'opération de filtrage peut être effectuée par une convolution, en 2-D, en approchant le noyau de l'intégrale de convolution par une fonction dont la TF 2-D est

$$H(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (5.68)$$

Cette méthode a été utilisée par Bates et Peters [9 et 10] avec une mise en oeuvre optique en utilisant des lentilles pour effectuer l'opération de la TF inverse.

Arrivé à ce stade, les choses semblent simples: on dispose d'un formalisme intégral pour relier les données ou projections à l'objet à reconstruire.

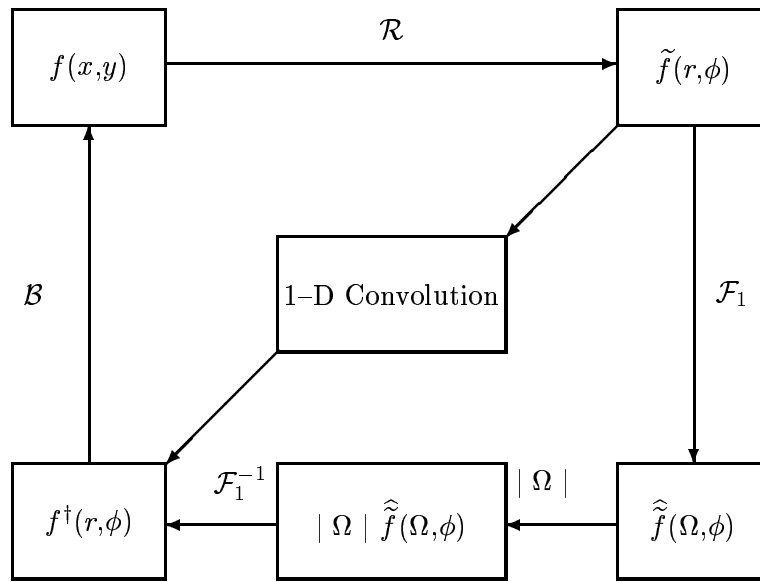


FIG. 5.3 – Inversion par rétroprojection et des projections filtrées.

Cette relation repose sur la transformation de Radon que l'on sait aussi inverser analytiquement. Le problème semble donc ne plus être que celui de l'approximation d'un problème continu par un problème discret se prêtant au calcul sur machine. Mais en fait, ces relations d'inversion ne sont que des points de départ pour la résolution d'un problème réel. Car elles ne s'appliquent rigoureusement qu'à des fonctions continues, à support compact et pour lesquelles on dispose de toutes les projections correspondant à toutes les lignes droites possibles dans le plan de la section de l'objet, c'est à dire une infinité de projections.

La condition de support compact ne pose pas de difficulté particulière car pour un problème physique la distribution de toute grandeur que nous voulons représenter à l'intérieur d'un objet peut être supposée avoir un support compact.

La condition de continuité elle aussi peut ne pas être très gênante dans certaines situations. Mais dans un problème pratique, on ne dispose que d'un sous-ensemble fini de ces projections. La nature finie des projections pose des difficultés très sérieuses. En particulier, se pose le problème de l'unicité de la solution. Un théorème démontré par Smith, Solmon et Wagner [12], et redécouvert par Marr [8], exprime cette difficulté de la manière suivante:

Une fonction continue f et à support compact dans \mathbf{R}^2 est déterminée d'une façon unique par n'importe quel ensemble infini de ses projections mais ne l'est pas par aucun ensemble fini de ces mêmes projections."

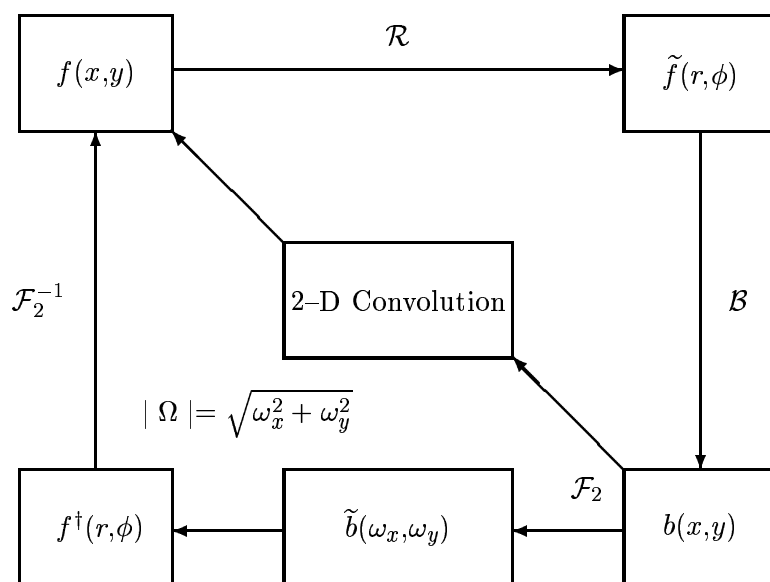


FIG. 5.4 – *Inversion par rétroprojection et filtrage par convolution 2-D.*

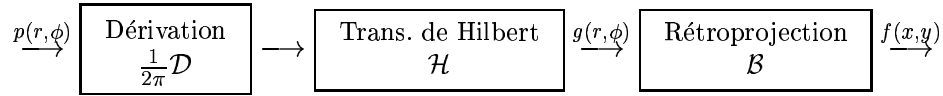
Parmi les différentes méthodes d'inversion, nous focalisons notre attention sur la méthode d'inversion dans le domaine de Fourier pour deux raisons:

- premièrement, parce que cette méthode a déjà eu beaucoup de succès grâce à l'utilisation des techniques de la TFR.
- deuxièmement, parce que cette méthode nous permet de bien comprendre la procédure de l'inversion et les difficultés posées.

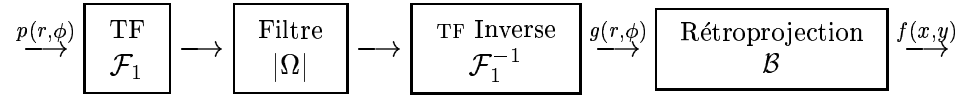
En effet les propriétés de la TF sont beaucoup mieux communément comprises que celles de la TR. On comprend plus facilement la difficulté du problème quand on dit que les projections ne remplissent pas complètement le domaine de Fourier de la fonction à reconstruire que lorsqu'on transpose la même situation dans le domaine de la TR.

Et finalement, un dernier intérêt est que, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, on peut trouver une partie commune entre la tomographie à rayons x et la tomographie à ondes diffractées qui est exactement ce remplissage plus ou moins dense du domaine de Fourier de l'objet.

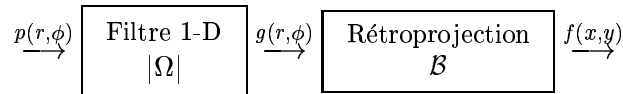
Résumé des différentes méthodes d'inversion en 2-D • Inversion directe de la Transformée de Radon



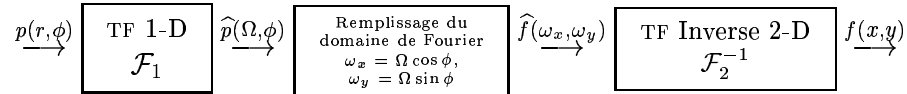
• Rétroprojection des projections filtrées



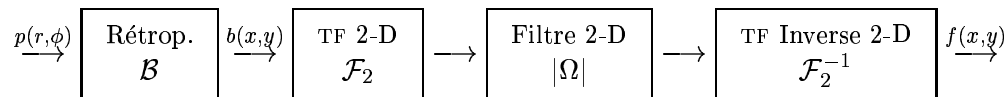
• Filtrage par convolution et rétroprojection



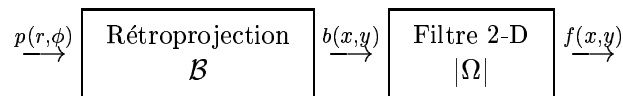
• Inversion dans le domaine de Fourier



• Rétroprojection et filtrage en 2-D



• Rétroprojection et filtrage par convolution en 2-D



Résumé des différentes méthodes d'inversion en 3-D • Inversion directe de la Transformée de Radon

$$\tilde{f}(r, \xi) \xrightarrow{\quad} \boxed{\begin{array}{c} \text{Dérivation} \\ \frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{Rétroprojection} \\ \mathcal{B} \end{array}} \xrightarrow{\quad} f(x, y, z)$$

- Rétroprojection des projections filtrées

$$\tilde{f}(r, \xi) \xrightarrow{\quad} \boxed{\begin{array}{c} \text{TF} \\ \mathcal{F}_1 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{Filtre} \\ |\Omega|^2 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{TF Inverse} \\ \mathcal{F}_1^{-1} \end{array}} \xrightarrow{g(r, \xi)} \boxed{\begin{array}{c} \text{Rétroprojection} \\ \mathcal{B} \end{array}} \xrightarrow{\quad} f(x, y, z)$$

- Filtrage par convolution et rétroprojection

$$\tilde{f}(r, \xi) \xrightarrow{\quad} \boxed{\begin{array}{c} \text{Filtre 1-D} \\ |\Omega|^2 \end{array}} \xrightarrow{g(r, \xi)} \boxed{\begin{array}{c} \text{Rétroprojection} \\ \mathcal{B} \end{array}} \xrightarrow{\quad} f(x, y, z)$$

5.8 Développement en série

La principal idée dans ces méthode est de développer en série les fonctions $f(\mathbf{x})$ et sa TR $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$ et de trouver un lien entre les coefficients de ces développements.

Considérons d'abord le cas où la fonction $f(x, y)$ est une fonction séparable en ρ et θ , *i.e.*; $f(x, y) = f(\rho, \theta) = g(\rho)S(\theta)$, ou bien dans le cas général $f(\mathbf{x})$ est une somme finie des fonctions séparables en ρ et $\boldsymbol{\omega}$, *i.e.*; on a

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{l, m} A_{lm} g_l(\rho) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}), \quad (5.69)$$

où

$$\sum_{l, m} = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{l=0}^{\infty}$$

et où $\mathcal{M}(n, l)$ est le nombre des harmoniques sphériques indépendants de degré l qui dépend de $(n-1)$ coordonnées $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi)$ et donné par

$$\mathcal{M}(n, l) = \frac{2l + n - 2}{l} \binom{l + n - 3}{l - 1}$$

avec

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}.$$

Notons que $\mathcal{M}(2, l) = 2$, et $\mathcal{M}(3, l) = 2l + 1$.

La TR de $f(\mathbf{x})$ ainsi définie est aussi séparable en r et en $\boldsymbol{\xi}$, *i.e.*;

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{l, m} A_{lm} \check{g}_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) \quad (5.70)$$

L'idée principale est de trouver un lien entre $\check{g}_l(r)$ et $g_l(\rho)$. Ceci peut se faire en partant du

$$A_{lm} \check{g}_l(r) = \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (5.71)$$

et remplaçant pour $\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi})$ on obtient

$$\begin{aligned} \check{g}_l(r) &= \frac{(4\pi)^\nu \Gamma(l+1) \Gamma(\nu)}{\Gamma(l+2\nu)} \int_r^\infty r^{2\nu} g_l(\rho) C_l^\nu \left(\frac{r}{\rho} \right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right)^{\nu-1/2} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{(-1)^{2\nu+1} \Gamma(l+1) \Gamma(\nu)}{2\pi^{\nu+1} \Gamma(l+2\nu) \rho} \int_\rho^\infty \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) C_l^\nu \left(\frac{\rho}{r} \right) \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right)^{\nu-1/2} dr \\ r \geq 0, \rho \geq 0, \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{(2\nu+1)} \check{g}_l(r), \quad \nu = \frac{n-2}{2} \end{aligned}$$

5.8.1 Cas des fonctions cylindriques

Cas $n = 2$: $\boldsymbol{\omega} = (\cos \theta, \sin \theta), \mathbf{x} = (x, y) = (\rho, \theta)$, $M(2, l) = 2, m = 1, 2, \nu = 0$

m=1:

$$S_{l1}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos l\theta$$

m=2:

$$S_{l2}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin l\theta$$

$$\sqrt{\pi}(S_{l1} + jS_{l2}) = \exp[jl\theta]$$

$$\sqrt{\pi}(S_{l1} - jS_{l2}) = \exp[-jl\theta]$$

$$f(\rho, \theta) = \sum_l g_l(\rho) \exp[jl\theta]$$

$$\tilde{f}(r, \phi) = \sum_l \check{g}_l(r) \exp[jl\phi]$$

$$g_l(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r, \phi) \exp[-jl\phi] d\phi$$

$$\check{g}_l(r) = 2 \int_r^\infty g_l(\rho) T_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{-1/2} d\rho$$

$$g_l(\rho) = \frac{-1}{\pi\rho} \int_\rho^\infty \frac{\partial \check{g}_l(r)}{\partial r} T_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r^2}{\rho^2} - 1\right)^{-1/2} dr$$

avec $T_l(t) = \cos[l \cos^{-1} t]$.

Pour $l = 0$ on trouve la transformée de Abel:

$$\check{g}_0(r) = 2 \int_r^\infty \rho g_0(\rho) (\rho^2 - r^2)^{-1/2} d\rho$$

$$g_0(\rho) = \frac{-1}{\pi} \int_\rho^\infty \frac{\partial \check{g}_0(r)}{\partial r} (r^2 - \rho^2)^{-1/2} dr$$

5.8.2 Cas des fonctions sphériques

Cas $n = 3$: $\boldsymbol{\omega} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \mathbf{x} = (x, y, z) = (\rho, \theta, \phi)$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} g_l(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.72)$$

alors, sa TR aussi sera séparable en r et en $\boldsymbol{\xi}$, *i.e.*;

$$\tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} \check{g}_l(r) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (5.73)$$

$$A_{lm}\check{g}_l(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) Y_{lm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} \check{g}_l(r) &= 2\pi \int_r^\infty \rho g_l(\rho) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{1}{2\pi r} \int_\rho^\infty \frac{\partial^2 \check{g}_l(r)}{\partial r^2} P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) dr \end{aligned}$$

5.8.3 Cas des fonctions sphérique en dimension 4

$$n = 4, \mathbf{x} = (x, y, z, w) = (\rho, \theta_1, \theta_2, \phi)$$

$$\begin{aligned} \check{g}_l(r) &= \frac{4\pi}{l+1} \int_r^\infty \rho^2 g_l(\rho) U_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{1/2} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{-1}{2\pi^2(l+1)r} \int_\rho^\infty \frac{\partial^3 \check{g}_l(r)}{\partial r^3} U_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r^2}{\rho^2} - 1\right)^{1/2} dr \end{aligned}$$

5.8.4 Projection sur une base orthogonale sur le disque unitaire

$$f(x,y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(\rho) \exp [jl\theta]$$

$$f(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{ls} Z_{l+2s}^l(\rho) \exp [jl\theta]$$

5.8.5 Projection sur une base orthogonale sur l'ensemble du plan réel

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(\rho) \exp [jn\theta] \quad (5.75)$$

$$f_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \theta) \exp [-jn\theta] d\theta \quad (5.76)$$

$$\hat{f}(\Omega, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n(\Omega) \exp [jn\phi] \quad (5.77)$$

$$\hat{f}_n(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\Omega, \phi) \exp [-jn\phi] d\phi \quad (5.78)$$

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\Omega, \phi) \exp [j\Omega r \sin(\phi - \theta)] |\Omega| d\Omega d\phi \quad (5.79)$$

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\Omega, \phi) \exp [j\Omega r \sin(\phi - \theta)] |\Omega| d\Omega d\phi \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} f_n(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \theta) \exp [-jn\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\Omega, \phi) \exp [j\Omega r \sin(\phi - \theta)] |\Omega| d\Omega d\phi \right\} \times \\ &\quad \times \exp [-jn\theta] d\theta \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$f_n(\rho) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\Omega, \phi) |\Omega| d\Omega d\phi \int_{-\pi}^{\pi} \exp [j(\Omega \rho \sin(\phi - \theta) - n\theta)] d\theta \quad (5.82)$$

$$\hat{f}_n(\Omega) = \int_0^{\infty} f_n(\rho) J_n(\rho\Omega) d\rho \quad (5.83)$$

$$f_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}_n(\Omega) J_n(\rho\Omega) d\Omega \quad (5.84)$$

$$f_n(\rho) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{d\tilde{f}(r) T_n(\rho/r)}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} dr \quad (5.85)$$

$$\tilde{f}(r)$$

$$T_n(x) = \cos \left(n \cos^{-1}(x) \right)$$

Transformée de Gegenbauer:

$$\check{g}_l(r) = \frac{(4\pi)^\nu \Gamma(l+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(l+2\nu)} \int_r^\infty r^{2\nu} g_l(\rho) C_l^\nu\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{\nu-1/2} d\rho$$

$$g_l(\rho) = \frac{(-1)^{2\nu+1} \Gamma(l+1)\Gamma(\nu)}{2\pi^{\nu+1} \Gamma(l+2\nu) \rho} \int_\rho^\infty \check{g}_l(r) C_l^\nu\left(\frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1\right)^{\nu-1/2} dr$$

$$r \geq 0, \rho \geq 0, \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) = \frac{d^{(2\nu+1)}}{dr} \check{g}_l(r)$$

Si

$$f(\mathbf{x}) = g_l(\rho) S_{lm}(\omega) \longrightarrow \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \check{g}_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\xi})$$

Chapitre 6

Inversion numérique et ses difficultés

- 6.1 Introduction
- 6.2 Problèmes inverses, problèmes mal-posés
- 6.3 Existence, unicité et stabilité de la solution
- 6.4 Méthodes algébriques
- 6.5 Difficultés pratiques
- 6.6 Principe de la régularisation
- 6.7 Régularisation avec information a priori de douceur
- 6.8 Régularisation avec information a priori de positivité
- 6.9 Régularisation dans les méthodes itératives
- 6.10 Régularisation avec introduction des contraintes supplémentaires

Chapitre 7

Généralisation

7.1 Introduction

7.2 Transformée de Radon généralisée

Une autre forme de la TR utilisée en géophysique est la suivante: On considère la paire $(t, q) \in \mathbf{R}^2$ où t représente le temps et q est une variable d'espace. $g(t, q) \in G$ représente un sismogramme. Si on considère une ligne droite dans le plan (t, q) décrite par $t = \tau + pq$, la TR de la fonction $g(t, q)$ est définie par

$$\mathcal{R}: \quad h(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau + pq, q) dq \quad (7.1)$$

τ représente le temps d'interception des ondes, et p est la lenteur ($\frac{t}{x}$) (inverse de la vitesse de propagation). Dans des applications en géophysique cette transformée est appelée la transformation τ - p ou encore le *slant-stack*. $h(\tau, p)$ est une représentation de décomposition en ondes planes des sismogrammes. L'opération de rétroprojection \mathcal{B} qui est aussi l'opérateur adjoint de \mathcal{R} est alors définie par

$$\mathcal{B}: \quad g(t, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - qp, p) dp \quad (7.2)$$

et la formule d'inversion de la TR peut être écrite sous la forme

$$\mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{R} = \mathcal{I} \quad (7.3)$$

où \mathcal{K} est l'opérateur de filtrage en 1-D, défini par

$$\mathcal{K}: \quad h(\tau, p) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int |\Omega| \tilde{h}(\Omega, p) \exp[-j\Omega t] d\Omega \quad (7.4)$$

et où

$$\mathcal{F}_1: \tilde{h}(\Omega, p) = \int h(\tau, p) \exp[-j\Omega t] dt \quad (7.5)$$

On définit la transformée de Radon généralisée (TRG) par

$$\mathcal{R}: h(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau + \phi(p, q), q) w(p, q) dq \quad (7.6)$$

c'est à dire l'intégrale de la fonction $g(t, q)$ le long d'un trajet curviligne donnée par $t = \tau + f(p, q)$ avec une fonction de pondération $w(p, q)$.

Une autre formule de généralisation s'obtient en effectuant une TF suivie par une TFI, par rapport à la variable t , de la fonction $g(t, q)$:

$$\mathcal{R}: h(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dw \exp[-j\omega t] \int_{-\infty}^{+\infty} dq \hat{g}(\omega, q) w(p, q) \exp[-j\omega f(p, q)] \quad (7.7)$$

où

$$\hat{g}(\omega, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, q) \exp[-j\omega t] dt \quad (7.8)$$

Cette dernière formule permet de définir une transformation encore plus générale de la forme:

$$\mathcal{R}: h(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dw \exp[-j\omega t] \times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \hat{g}(\omega, q) w(p, q, w) \exp[-j\omega f(p, q)] \quad (7.9)$$

L'intérêt de ces deux généralisations est dans leurs différentes applications. En effet la TR classique est définie comme l'intégrale d'une fonction sur une famille de lignes droites. Une généralisation était donc nécessaire pour définir l'intégrale d'une fonction sur une famille d'objets géométriques autres que des lignes droites, par exemple, des parcours curvilignes, des cercles, des polygones, ou même d'autres objets géométriques. Ceci ouvre son utilisation dans des applications en reconnaissance de formes en traitement d'images où la TR classique est connue sous le nom de transformation de Hough.

La TRG ainsi définie peut être utilisée comme l'outil de comparaison d'une image donnée avec des formes pré définies.

7.3 Applications

Chapitre 8

Transformée de Radon discrète (TRD)

8.1 Introduction

8.2 Discrétisation de la TR

8.3 Définition de la TRD

L'utilisation fréquente de la TR dans de nombreuses applications a suscité depuis peu des travaux pour définir une TRD (comme ce qui a été fait pour la TF) sous forme d'une opération matricielle.

En suivant alors la même démarche que pour la TF, on peut définir une TRD pour une séquence périodique $x_k(n) : x_k(n+N) = x_k(n)$, $-K < k < K$, $n = 0, \dots, N-1$.

Notons par $x_k(n)$, une séquence à 2-D où $-K < k < K$. Pour un indice fixe de k , la séquence $x_k(n)$ représente alors un signal discret (par exemple une projection ou un tracé sismique). Choisissons $(2K+1)$ de ces séquences et définissons deux séquences périodiques (avec la période N):

$$x(n) = [x_{-K}(n), \dots, x_0(n), \dots, x_{+K}(n)] \quad (8.1)$$

et

$$y(n) = [x_{-J}(n), \dots, x_0(n), \dots, x_{+J}(n)] \quad (8.2)$$

et supposons qu'il existe une relation entre ces deux séquences, donnée par

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M R_m x(n+m) \quad (2M+1) < N \quad (8.3)$$

où les matrices R_m ont des dimensions $(2J+1) \times (2K+1)$. Une telle transformation peut être considérée comme une TRD généralisée.

Cette définition est très générale car il s'agit, en fait, de la définition d'un filtre multicanaux invariant par translation avec $(2K + 1)$ entrées et $(2J + 1)$ sorties. Mais l'intérêt de cette définition est, premièrement, dans le fait que n'importe quelle discrétisation d'une des équations (A.1.32), (A.1.38), (A.1.38) ou (A.1.40) peut être mise sous cette forme, et, deuxièmement, cette équation peut être mise sous forme d'une équation de la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (8.4)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs de dimensions respectives de $N(2K + 1)$ et $N(2J + 1)$, et la matrice \mathbf{R} est une matrice bloc-circulante constituée de $(2M + 1) \times (2M + 1)$ blocs de matrices de dimensions $(2J + 1) \times (2K + 1)$.

L'inversion d'une telle matrice peut être effectuée à l'aide de la TFD. Pour une discussion sur l'usage et l'inversion de cette matrice en géophysique se référer aux [2 et 6].

8.4 Inversion de la TRD

8.5 TRD et fonctions sphéroïdales aplaties

Chapitre 9

Applications

9.1 Introduction

9.2 Tomographie à rayons X

9.3 Tomographie à émission de positrons (TEP)

9.4 Tomographie ultrasonore

9.5 Astronomie

9.6 Microscopie électronique

9.7 Imagerie résonance magnétique nucléaire (RMN)

9.8 Géophysiques

9.9 Autres applications

Chapitre 10

Quelques algorithmes

10.1 Introduction et objectifs

L'objectif de ce chapitre est de présenter un ensemble de programmes de reconstruction d'images d'usage assez général. Le principe des méthodes utilisées a déjà été décrite dans les chapitres précédents. Certains de ces algorithmes sont devenus maintenant classiques comme la rétroprojection ou l'ART. D'autres sont plus récents comme les méthodes de régularisation présentées dans le chapitre 7. Le principe de chacune de ces méthodes est de nouveau rappelé brièvement et un ensemble de sous-programmes et un programme principal sont présentés sous forme d'un listing de programmes écrites en Fortran 77. Les sources de ces programmes ainsi qu'un programme exécutable sont disponibles sur une disquette au format IBM-PC. L'organisation du chapitre est la suivante :

Dans le paragraphe 10.2 un ensemble de sous-programmes d'utilité générale sont présentés avec quelques explications sommaires de leur utilisation. Dans le paragraphe 10.3 vous trouverez un ensemble de sous-programmes d'entrée-sortie et de lecture-écriture de fichiers qui vont être utilisés ensuite dans les programmes principaux.

Le paragraphe 10.4 est consacré aux sous-programmes pour la résolution des problèmes directs de la reconstruction d'images tomographiques (calcul des projections pour un objet donné), c'est à dire le calcul de la TR d'une fonction $f(x,y)$. Cette fonction doit être fournie sous forme d'un tableau à deux indices représentant les valeurs de cette fonctions. Ces sous-programmes ont alors pour entrée ce tableau et fournissent en sortie un autre tableau à deux indices qui représente la TR de cette fonction, c'est à dire les valeurs de $p(r,\phi)$. Ainsi, par exemple, la première colonne de ce tableau représente la projection de $f(x,y)$ pour $\phi = \phi_1$ et la dernière colonne de ce tableau représente la projection de $f(x,y)$ pour $\phi = \phi_2$; ϕ_1 et ϕ_2 étant les angles minimum et maximum de ces projections.

Dans le paragraphe 10.5 vous trouverez les sous-programmes qui effec-

tuent l'opération de rétroprojection (opérateur adjoint de la TR).

Dans le paragraphe 10.6 vous trouverez les sous-programmes et programmes de reconstruction par les méthodes algébriques du type ART, SIRT, etc. . .

Dans le paragraphe 10.7 vous trouverez les sous-programmes et programmes de reconstruction par les méthodes itératives d'inversion généralisée comme les différentes variations de la méthode de Gerchberg-Papoulis.

Dans le paragraphe 10.8 vous trouverez les sous-programmes et programmes de reconstruction par une méthode itérative de régularisation. Ce programme permet d'utiliser plusieurs fonctionnelles régularisantes comme la norme $\|\cdot\|$ ou l'entropie. Il permet aussi d'appliquer plusieurs types de contraintes linéaires ou non-linéaires comme la contrainte de support ou la contrainte de positivité.

Et, finalement, dans le paragraphe 10.9 vous trouverez plusieurs exemples de fichiers de données utilisés couramment dans la littérature et des résultats de reconstruction par ces différents programmes, afin que le lecteur puisse, d'une part vérifier ces programmes et d'autre part faire une comparaison sur ces résultats.

10.2 Programmes d'utilité générale

10.3 Programmes d'entrée-sortie et lecture-écriture des fichiers

10.4 Programmes de calcul de la TR (des projections)

10.5 Programmes des différentes méthodes de reconstruction

10.6 Reconstruction par rétroprojection

10.7 Reconstruction par les méthodes algébriques de ART et SIRT

10.8 Reconstruction par les méthodes de régularisation

Chapitre 11

Bibliographie

A

Annexe A

Transformations linéaires

Une transformation linéaire d'une fonction multivariable $f(\mathbf{x})$ est définie par l'équation intégrale suivante:

$$g(\boldsymbol{\omega}) = \int f(\mathbf{x})h(\mathbf{x},\boldsymbol{\omega}) d\mathbf{x}$$

la fonction $h(\mathbf{x},\boldsymbol{\omega})$ est appelée le noyau de l'opérateur. Suivant les différentes propriétés de cette fonction on a les transformations suivantes:

- Invariantes par translation (Convolution): $h(\mathbf{x},\boldsymbol{\omega}) = h(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega})$

$$g(\boldsymbol{\omega}) = \int f(\mathbf{x})h(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{x} = f * h$$

- Séparables:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = h_1(x_1, \omega_1) h_2(x_2, \omega_2) \dots h_n(x_n, \omega_n)$$

- Séparables et invariantes par translation:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = h_1(x_1 - \omega_1) h_2(x_2 - \omega_2) \dots h_n(x_n - \omega_n)$$

- Séparable, invariantes par translation et symétriques:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = h(x_1 - \omega_1) h(x_2 - \omega_2) \dots h(x_n - \omega_n)$$

Dans les pages qui suivent nous allons énumérer les transformations les plus utilisées dans le cas des fonctions à une (1-D) ou à deux variables (2-D).

A.1 Transformations 1-D

– Cas général:

$$g(\omega) = \int f(t)h(t,\omega) dt$$

– Invariance par translation (Convolution): $h(t,\omega) = h(t - \omega)$

$$g(\omega) = \int f(t)h(t - \omega) dt = f * h$$

– Transformée de Laplace: \mathcal{L}

$$\begin{cases} L(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp[-st] dt \\ f(t) &= \frac{1}{j2\pi} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} L(s) \exp[+st] ds \end{cases}$$

– Transformée de Fourier: \mathcal{F}

$$\begin{cases} F(\omega) &= \int f(t) \exp[-j\omega t] dt \\ f(t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int F(\omega) \exp[+j\omega t] d\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(\nu) &= \int f(t) \exp[-j2\pi\nu t] dt \\ f(t) &= \int F(\nu) \exp[+j2\pi\nu t] d\nu \end{cases}$$

– Transformée en cosinus: \mathcal{C}

Pour une fonction paire $f(-t) = f(t)$

$$\begin{cases} C(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ f(t) &= \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\infty} C(\omega) \cos(\omega t) d\omega \end{cases}$$

$$C(\omega) = F(\omega) + F(-\omega)$$

– Transformée en sinus: \mathcal{S}

Pour une fonction impaire $f(-t) = -f(t)$

$$\begin{cases} S(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \sin(\omega t) d\omega \end{cases}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{j}[F(\omega) - F(-\omega)]$$

– Transformée de Hartley: \mathcal{H}

$$\begin{cases} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) dt \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(\omega) (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) d\omega \end{cases}$$

– Transformée de Mellin: \mathcal{M}

$$\begin{cases} M(s) &= \int_0^\infty f(t)t^{s-1} dt \\ f(t) &= \frac{1}{j2\pi} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} M(s)t^{-s} ds \end{cases}$$

– Transformée d'Abel: \mathcal{A}

$$\begin{cases} \check{g}(r) &= 2 \int_r^\infty \rho g(\rho) (\rho^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho \\ g(\rho) &= \frac{-1}{\pi} \int_r^\infty \frac{\partial}{\partial r} \check{g}(r) (r^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} dr \end{cases}$$

$$A^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

Pour $\alpha = n$, un entier nonnégative,

$$A^n(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_1$$

Pour $\text{Re}(\alpha) > 0$ et $\text{Re}(\beta) > 0$

$$A^\alpha(A^\beta(f)) = A^{\alpha+\beta}(f)$$

$$A^1(f) = \int_0^x f(t) dt$$

Si f est continue

$$A^0(f) = f$$

– Transformée de Weyl: \mathcal{W}

$$W^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt$$

Pour $\text{Re}(\alpha) > 0$ et $\text{Re}(\beta) > 0$

$$W^\alpha(W^\beta(f)) = W^{\alpha+\beta}(f)$$

Si f est continue

$$W^0(f) = f$$

– Transformée de Hilbert: \mathcal{H}

$$\begin{cases} H(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \\ f(t) &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-t} dx \end{cases}$$

Ces intégrales doivent être interprétées au sens de la valeur principale de Cauchy pour $t = x$.

- $\mathcal{H}(\mathcal{H}(f)) = f$,
- f et $\mathcal{H}(f)$ sont orthogonales, i.e.,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r [f\mathcal{H}(f)](u) du = 0$$

- La Transformée de Hilbert d'une constante est zéro.
- Lien entre la TH et la TF :

$$\mathcal{H}(f) = f * \frac{-1}{\pi t} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{F}\{\mathcal{H}(f)\} = j \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega)$$

– Transformée de Gegenbauer:

$$\begin{cases} \check{g}_l(r) &= \frac{(4\pi)^\nu \Gamma(l+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(l+2\nu)} \int_r^\infty r^{2\nu} g_l(\rho) C_l^\nu\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{(-1)^{2\nu+1} \Gamma(l+1)\Gamma(\nu)}{2\pi^{\nu+1} \Gamma(l+2\nu) \rho} \int_\rho^\infty \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) C_l^\nu\left(\frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dr \end{cases}$$

avec

$$r \geq 0, \rho \geq 0, \check{g}_l^{(2\nu+1)}(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^{(2\nu+1)} \check{g}_l(r)$$

Si

$$f(\mathbf{x}) = g_l(\rho) S_{lm}(\omega) \quad \longrightarrow \quad \tilde{f}(r, \boldsymbol{\xi}) = \check{g}_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\xi})$$

– Transformée de Legendre:

$$\begin{cases} \check{g}_l(r) &= 2\pi \int_r^\infty \rho g_l(\rho) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_\rho^\infty \frac{d^2}{dr^2} \check{g}_l(r) P_l\left(\frac{r}{\rho}\right) dr \end{cases}$$

– Transformée de Tchebycheff de deuxième espèce:

$$\begin{cases} \check{g}_l(r) &= \frac{4\pi}{l+1} \int_r^\infty \rho^2 g_l(\rho) U_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho \\ g_l(\rho) &= \frac{-1}{2\pi^2(l+1)\rho} \int_\rho^\infty \frac{d}{dr} \check{g}_l(r) U_l\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r^2}{\rho^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dr \end{cases}$$

- Transformée de Fourier locale: \mathcal{F}_{\square}

$$F_w(\omega, t) = \int f(t)w(t - t') \exp[-j\omega t] dt$$

- Transformée de Gabor: \mathcal{G}_{σ}

$$G_{\sigma}(\omega, t) = \int f(t) \exp\left[-\frac{(t - t')^2}{2\sigma^2}\right] \exp[-j\omega t] dt$$

- Transformée de Wigner: \mathcal{W}

$$W(\omega, t) = \int f(t + \tau/2) f(t - \tau/2) \exp[-j\omega\tau] d\tau$$

- Transformée de Hadamard:
- Transformée de Haar:
- Transformée Slant:

A.2 Transformations 2-D

– Cas général:

$$g(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) h(x, y, \omega_x, \omega_y) dx dy$$

– Invariance par translation (Convolution):

$$h(x, y, \omega_x, \omega_y) = h(x - \omega_x, y - \omega_y)$$

$$g(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) h(x - \omega_x, y - \omega_y) dx dy = f * h$$

– Transformation séparable: $h(x, y, \omega_x, \omega_y) = h_1(x, \omega_x) h_2(y, \omega_y)$

$$\begin{aligned} g(\omega_x, \omega_y) &= \iint f(x, y) h_1(x, \omega_x) h_2(y, \omega_y) dx dy \\ &= \int \left[\int f(x, y) h_1(x, \omega_x) dx \right] h_2(y, \omega_y) dy \end{aligned}$$

– Transformation séparable et invariant par translation:

$$h(x, y, \omega_x, \omega_y) = h_1(x - \omega_x) h_2(y - \omega_y)$$

$$\begin{aligned} g(\omega_x, \omega_y) &= \iint f(x, y) h_1(x - \omega_x) h_2(y - \omega_y) dx dy \\ &= \int \left[\int f(x, y) h_1(x - \omega_x) dx \right] h_2(y - \omega_y) dy \end{aligned}$$

– Transformation séparable, invariant par translation et symétrique:

$$h(x, y, \omega_x, \omega_y) = h(x - \omega_x) h(y - \omega_y)$$

$$\begin{aligned} g(\omega_x, \omega_y) &= \iint f(x, y) h(x - \omega_x) h(y - \omega_y) dx dy \\ &= \int \left[\int f(x, y) h(x - \omega_x) dx \right] h(y - \omega_y) dy \end{aligned}$$

– Transformée de Fourier \mathcal{F} :

$$\begin{cases} F(\omega_x, \omega_y) = \iint f(x, y) \exp [j(\omega_x x + \omega_y y)] dx dy \\ f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint F(\omega_x, \omega_y) \exp [j(\omega_x x + \omega_y y)] d\omega_x d\omega_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u, v) = \iint f(x, y) \exp [-j2\pi(ux + vy)] dx dy \\ f(x, y) = \iint F(u, v) \exp [j2\pi(ux + vy)] du dv \end{cases}$$

– Transformée de Hankel d'ordre zéro :

$$f(x,y) = f(\rho), \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad F(u,v) = F(\Omega), \quad \Omega^2 = u^2 + v^2,$$

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-jz \cos \theta] d\theta$$

$$\begin{cases} F(\Omega) &= 2\pi \int_0^\infty f(\rho) J_0(2\pi\rho\Omega) \rho d\rho \\ f(\rho) &= 2\pi \int_0^\infty F(\Omega) J_0(2\pi\rho\Omega) \Omega d\Omega \end{cases}$$

– Transformée de Fourier généralisée :

$$\begin{cases} F(\Omega) &= \int_0^\infty f(\rho) K(\Omega, \rho) d\rho \\ f(\rho) &= \int_0^\infty F(\Omega) K(\Omega, \rho) d\Omega \end{cases}$$

– Transformée de Hankel d'ordre ν :

$$K(\Omega, \rho) = \sqrt{\Omega\rho} J_\nu(\Omega\rho)$$

$$\begin{cases} F(\Omega) &= \int_0^\infty f(\rho) J_\nu(\Omega\rho) \rho d\rho \\ f(\rho) &= \int_0^\infty F(\Omega) J_\nu(\Omega\rho) \Omega d\Omega \end{cases}$$

$\nu = 0 \rightarrow$ Transformée de Hankel d'ordre zéro.

$\nu = \frac{1}{2} \rightarrow J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z)$ Transformée en sin.

$\nu = -\frac{1}{2} \rightarrow J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(z)$ Transformée en cos.

$$x + jy = \rho \exp[j\theta], \quad u + jv = \Omega \exp[j\theta]$$

$$(x,y,z) \rightarrow (\rho, \theta, z), \quad (u,v,w) \rightarrow (\Omega, \Theta, w)$$

$$\begin{cases} F(\Omega, \Theta, w) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho, \theta, z) \exp\{-j2\pi[\Omega\rho \cos(\theta - \Theta) + wz]\} \rho d\rho dz \\ f(\rho, \theta, z) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega, \Theta, w) \exp\{-j2\pi[\Omega\rho \cos(\theta - \Theta) + wz]\} \Omega d\Omega dw \end{cases}$$

Symétrie circulaire: indépendance de f par rapport à θ et de F par rapport à Θ

$$\begin{cases} F(\Omega, w) &= 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho, z) J_0(2\pi\Omega\rho) \exp[-j2\pi wz] \rho d\rho dz \\ f(\rho, z) &= 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega, w) J_0(2\pi\Omega\rho) \exp[+j2\pi wz] \Omega d\Omega dw \end{cases}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \theta, \phi), \quad (u, v, w) \longrightarrow (\Omega, \Theta, \Phi)$$

$$\begin{cases} F(\Omega, \Theta, \Phi) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\rho, \theta, \phi) \exp \{-j2\pi\Omega\rho[\cos\theta \cos\Theta + \sin\theta \sin\Theta \cos(\phi - \Phi)]\} \\ &\quad \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ f(\rho, \theta, \phi) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\Omega, \Theta, \Phi) \exp \{+j2\pi\Omega\rho[\cos\theta \cos\Theta + \sin\theta \sin\Theta \cos(\phi - \Phi)]\} \\ &\quad \Omega^2 \sin\Theta \, d\Omega \, d\Theta \, d\Phi \end{cases}$$

Symétrie circulaire: indépendance de f par rapport à ϕ et de F par rapport à Φ

$$\begin{cases} F(\Omega, \Theta) &= 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi f(\rho, \theta) J_0(2\pi\Omega\rho \sin\theta \sin\Theta) \exp[-j2\pi\Omega\rho \cos\theta \cos\Theta] \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \\ f(\rho, \theta) &= 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi F(\Omega, \Theta) J_0(2\pi\Omega\rho \sin\theta \sin\Theta) \exp[-j2\pi\Omega\rho \cos\theta \cos\Theta] \Omega^2 \sin\Theta \, d\Omega \, d\Theta \end{cases}$$

Symétrie sphérique: indépendance de f par rapport à ϕ et à θ et de F par rapport à Φ et à Θ

$$\begin{cases} F(\Omega) &= 4\pi \int_0^\infty f(\rho) \operatorname{sinc}(2\Omega\rho) \rho^2 \, d\rho \\ f(\rho) &= 4\pi \int_0^\infty F(\Omega) \operatorname{sinc}(2\Omega\rho) \Omega^2 \, d\Omega \end{cases}$$

Symétrie sphérique en dimension n :

$$\begin{cases} F(\Omega) &= \frac{2\pi}{\Omega^{n/2-1}} \int_0^\infty f(\rho) J_{n/2-1}(2\pi\Omega\rho) \rho^{n/2} \, d\rho \\ f(\rho) &= \frac{2\pi}{\Omega^{n/2-1}} \int_0^\infty F(\Omega) J_{n/2-1}(2\pi\Omega\rho) \Omega^{n/2} \, d\Omega \end{cases}$$

– Transformée en cosinus: \mathcal{C}

Pour une fonction paire $f(-x, -y) = f(x, y)$

$$C(\omega_x, \omega_y) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \cos(\omega_x x) \cos(\omega_y y) \, dx \, dy$$

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty C(\omega_x, \omega_y) \cos(\omega_x x) \cos(\omega_y y) \, d\omega_x \, d\omega_y$$

– Transformée en sinus: \mathcal{S}

Pour une fonction impaire $f(-x, -y) = -f(x, y)$

$$S(\omega_x, \omega_y) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \sin(\omega_x x) \sin(\omega_y y) \, dx \, dy$$

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty S(\omega_x, \omega_y) \sin(\omega_x x) \sin(\omega_y y) \, d\omega_x \, d\omega_y$$

- Transformée de Fourier locale: \mathcal{F}_{\square}

$$F_w(u, v, x, y) = \iint f(x, y) w(x - x', y - y') \exp[-j(ux' + vy')] dx' dy'$$

- Transformée de Gabor: \mathcal{G}_{σ}

$$G_{\sigma}(\omega, t) = \int f(x, y) \exp\left[-\frac{(t - t')^2}{2\sigma^2}\right] \exp[-j\omega t'] dt'$$

- Transformée de Wigner: \mathcal{W}

$$W(\omega, t) = \int f(t + \tau/2) f(t - \tau/2) \exp[-j\omega\tau] d\tau$$

- Transformée de Hartley: \mathcal{H}

- Transformée de Hadamard: \mathcal{H}

- Transformée de Haar: \mathcal{H}

- Transformée Slant: \mathcal{S}

- Transformée de Radon: \mathcal{R} Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace à 2-D, $f(x, y)$ une fonction continue et à support compact et $L_{r, \phi}$ un ensemble de lignes droites dans ce plan défini par $r = x \cos \phi + y \sin \phi$. On définit alors la transformée de Radon de f , notée \tilde{f} , par

$$\tilde{f}(r, \phi) = \int_L f(x, y) dl$$

Annexe B

Fonctions spéciales

B.1 Tchebycheff de première espèce

– Définition :

$$\begin{aligned} T_l(x) &= \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^l + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^l \right], \quad 0 < x < \infty \\ &= \cos(l \arccos x), \quad 0 < x < 1 \\ &= \cosh(l \operatorname{arcosh} x), \quad 1 < x < \infty \end{aligned}$$

– Quelques propriétés :

$$T_l(-x) = (-1)^l T_l(x), \quad T_l(0) = \cos\left(l \frac{\pi}{2}\right), \quad T_l(1) = 1$$

– Fonction génératrice :

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2xz + z^2} = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} T_l(x) z^l, \quad -1 < x < 1, |z| < 1$$

– Relation de récurrence :

$$\begin{aligned} T_{l+1} &= 2xT_l - T_{l-1} \\ (1 - x^2)T_l' &= lT_{l-1} - lxT_l \\ (1 - x^2)T_l'' - xT_l' + l^2T_l &= 0 \end{aligned}$$

– Les premières :

l	0	1	2	3	4
$T_l(x)$	1	x	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$	$8x^4 - 8x^2 + 1$

– Orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 T_l(x) T_m(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \begin{cases} 0 & l \neq m \\ \frac{\pi}{2} & l = m \neq 0 \\ \pi & l = m = 0 \end{cases}$$

B.2 Tchebycheff de deuxième espèce

– Définition :

$$\begin{aligned} U_{l-1}(x) &= \frac{1}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \left[(x + \sqrt{x^2-1})^l + (x - \sqrt{x^2-1})^l \right], \quad 0 < x < \infty, x \neq 1 \\ &= \frac{\sin(l \arccos x)}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 < x < 1 \\ &= \frac{\sinh(l \operatorname{arcosh} x)}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad 1 < x < \infty \end{aligned}$$

– Quelques propriétés :

$$U_l(-x) = (-1)^l U_l(x), \quad U_l(0) = \cos\left(l \frac{\pi}{2}\right), \quad U_l(1) = l + 1$$

– Fonction génératrice :

$$\frac{1}{1-2xz+z^2} = \sum_{l=0}^{\infty} U_l(x)z^l, \quad -1 < x < 1, |z| < 1$$

– Relation de récurrence :

$$\begin{aligned} U_{l+1} &= 2xU_l - U_{l-1} \\ (1-x^2)U_l' &= (l+1)U_{l-1} - l x U_l \\ (1-x^2)U_l'' - 3xU_l' + l(l+2)U_l &= 0 \end{aligned}$$

– Les premières :

l	0	1	2	3	4
$U_l(x)$	1	$2x$	$4x^2 - 1$	$8x^3 - 4x$	$16x^4 - 12x^2 + 1$

– Orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 U_l(x) U_m(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{lm}$$

– Autres :

$$\begin{aligned} U_{l-1}(x) &= \frac{1}{l} T_l'(x), \quad l \geq 1 \\ T_l(x) &= U_l(x) - x U_{l-1}(x), \quad l \geq 1 \\ (1-x^2)U_l(x) &= x T_{l+1}(x) - T_{l+1}(x) \end{aligned}$$

B.3 Hermite

– Définition (formules de Rodrigues):

$$H_l(x) = (-1)^l \exp [x^2] \left(\frac{d}{dx} \right)^l \exp [-x^2]$$

$$\left(-\frac{d}{dx} \right)^m \exp [-x^2] H_n(x) = \exp [-x^2] H_{m+n}(x)$$

– Quelques propriétés:

$$H_l(-x) = (-1)^l H_l(x), \quad H_{2l}(0) = (-1)^l \frac{2l!}{l!}, \quad H_{2l+1}(0) = 0$$

– Fonction génératrice:

$$\exp [2xz - z^2] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{H_l(x)z^l}{l!}$$

– Relation de récurrence:

$$\begin{aligned} H_{l+1} &= 2xH_l - 2lH_{l-1} \\ H'_l &= 2lH_{l-1} \\ H''_l - 2xH'_l + 2lH_l &= 0 \end{aligned}$$

– Les premières:

l	0	1	2	3	4	5
$H_l(x)$	1	$2x$	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$	$16x^4 - 48x^2 + 12$	$32x^5 - 160x^3 + 120x$

– Orthogonalité:

$$\int_{-1}^1 H_l(x) H_m(x) \exp [-x^2] dx = \sqrt{\pi} 2^l l! \delta_{lm}$$

– Autre relations:

k	0	1	2	3
x^k	H_0	$\frac{1}{2}H_1$	$\frac{1}{4}(2H_0 + H_2)$	$\frac{1}{8}(H_3 + 6H_1)$

k	4	5
x^k	$\frac{1}{16}(H_4 + 12H_2 + 12H_0)$	$\frac{1}{32}(H_5 + 20H_3 + 60H_1)$

B.4 Laguerre

– Définition (formules de Rodrigues) :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} \exp[x]}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n [x^{n+\alpha} \exp[-x]]$$

– Quelques propriétés :

$$\begin{aligned} H_{2m}(x) &= (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{-\frac{1}{2}}(x^2) \\ H_{2m+1}(x) &= (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_m^{\frac{1}{2}}(x^2) \end{aligned}$$

– Relation de récurrence :

$$\begin{aligned} nL_n^\alpha &= (2n-1+\alpha-x)L_{n-1}^\alpha - (n-1+\alpha)L_{n-2}^\alpha \\ L_n^\alpha &= L_{n-1}^\alpha + L_n^{\alpha-1} \\ \frac{d}{dx}L_n^\alpha &= -L_{n-1}^{\alpha+1} \end{aligned}$$

– Les premières :

$$\begin{array}{c|c|c|c} n & 0 & 1 & 2 \\ \hline L_n^\alpha(x) & 1 & 1+\alpha-x & \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) - (2+\alpha)x + \frac{1}{2}x^2 \\ \hline n & & 3 & \\ \hline L_n^\alpha(x) & \frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha) - \frac{1}{2}(2+\alpha)(3+\alpha)x - \frac{1}{2}(3+\alpha)x^2 - \frac{1}{6}x^3 & & \end{array}$$

– Orthogonalité :

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp[-x] L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!} \delta_{lm}, \quad \text{Re}(\alpha) > -1$$

– Autre relations :

B.5 Gegenbauer

– Définition :

$$C_l^\nu(x) =$$

– Quelques propriétés :

$$\begin{aligned} C_0^0(1) &= 1 \\ C_l^0(1) &= \frac{2}{l} \\ C_{2l+1}^\nu(0) &= 0 \\ C_{2l}^\nu(0) &= \frac{(-1)^l \Gamma(l+\nu)}{l! \Gamma(\nu)} \\ C_l^\nu(-x) &= (-1)^l C_l^\nu(x) \end{aligned}$$

$$C_l^0(x) = \frac{2}{l}T_l(x), \quad C_l^{\frac{1}{2}}(x) = P_l(x)$$

– Fonction génératrice :

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\nu} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l^\nu(x)z^l, \quad \nu \neq 0$$

– Relation de récurrence :

$$\begin{aligned} (l+1)C_{l+1}^\nu &= 2(l+\nu)x C_l^\nu - (l+2\nu-1)C_{l-1}^\nu \\ \frac{d}{dx}C_l^\nu &= 2\nu C_{l-1}^{\nu+1} \end{aligned}$$

– Les premières :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline C_l^\nu(x) & 1 & 2\nu x & 2\nu(1+\nu)x^2 - \nu & \frac{4}{3}\nu(1+\nu)(2+\nu)x^3 - 2\nu(1+\nu)x \\ \hline n & & & 4 & \\ \hline C_l^\nu(x) & & & \frac{2}{3}\nu(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)x^4 - 2\nu(1+\nu)(2+\nu)x^2 + \frac{1}{2}\nu(1+\nu) & \end{array}$$

– Orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 C_l^\nu(x)C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi 2^{1-2\nu}\Gamma(l+2\nu)}{l!(\nu+l)\Gamma^2(\nu)} \delta_{lm}$$

– Autre relations :

$$\begin{aligned} C_l^0(x) &= \frac{2}{l}T_l(x) \\ C_l^1(x) &= U_l(x) \\ C_l^{\frac{1}{2}}(x) &= P_l(x) \end{aligned}$$

$$C_0^0(1) = 1, \quad C_l^0(1) = \frac{2}{l}, \quad C_{2l+1}^\nu(0) = 0$$

$$C_{2l}^\nu(0) = \frac{(-1)^l \Gamma(l+\nu)}{l! \Gamma(\nu)}, \quad C_{2l}^\nu(1) = \frac{\Gamma(l+2\nu)}{l! \Gamma(2\nu)}$$

B.6 Legendre

– Définition :

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^l (t^2 - 1)^l$$

Polynômes de Legendre généralisée :

$$P_l^m(t) = \frac{1}{2^l l!} (1-t^2)^{m/2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{l+m} (t^2 - 1)^l, \quad m = 0, \dots, l.$$

- Les premières :
 - Quelques propriétés :
- Ces polynômes sont reliés aux fonctions sphéroidales harmoniques par

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) \exp [jm\phi], \quad m = 0, \dots, l.$$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes:

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi)$$

$$\begin{aligned} S_{lm}^e &= \frac{Y_{lm} + Y_{lm}^*}{\sqrt{2}} \\ S_{lm}^o &= \frac{Y_{lm} - Y_{lm}^*}{\sqrt{2}} \\ m = 0 &\longrightarrow S_{l0} = Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

- Orthogonalité :

$$\langle Y_{lm}(\theta, \phi), Y_{l'm'}(\theta, \phi) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

B.7 Zernike

- Définition :

$$\begin{aligned} Z_{l+2s}^l(-r) &= (-1)^l Z_{l+2s}^l(r) \\ Z_{-l+2s}^{-l}(-r) &= Z_{l+2s}^l(r) \end{aligned}$$

- Orthogonalité :

Les fonctions

$$B_s^l(r, \theta) = Z_{|l|+2s}^{|l|}(r) \exp [jl\theta]$$

forment une base orthogonale complète sur le disque unitaire :

$$\langle B_s^l(r, \theta), B_t^{l'}(r, \theta) \rangle_r = \int_0^{2\pi} \int_0^1 B_s^l(r, \theta) B_t^{l'}(r, \theta) r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2(|l| + 2s + 1)} \delta_{st} \delta_{ll'}$$

$$\langle Z_{l+2s}^l(r), Z_{l+2t}^l(r) \rangle_r = \int_0^1 Z_{l+2s}^l(r) Z_{l+2t}^l(r) r \, dr = \frac{1}{2(|l| + 2s + 1)} \delta_{st}$$

$$f(x, y) = f(\rho, \theta) = Z_{l+2s}^l(\rho) \exp [jl\theta] = B_s^l(r, \theta)$$

$$\widehat{f}(\omega_x, \omega_x) = \widehat{f}(\Omega, \phi) = (-1)^s 2\pi \exp \left[jl \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{J_{l+2s+1}(\Omega)}{\Omega}$$

$$\tilde{f}(r, \phi) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \hat{f}(\Omega, \phi) \right\} = \frac{2}{|l| + 2s + 1} \sqrt{1 - r^2} U_{|l|+2s}(r) \exp[jl\phi]$$

Les fonctions

$$F_s^l(\Omega, \phi) = J_{|l|+2s+1}(\Omega) \exp[jl\phi]$$

forment une base orthogonale complète dans l'espace de Fourier (Ω, ϕ) :

$$\int_0^\infty J_{|l|+2s+1}(\Omega) J_{|l|+2t+1}(\Omega) \Omega^{-1} d\Omega = \frac{1}{2(|l| + 2s + 1)} \delta_{st}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty F_s^l(\Omega, \phi) F_{s'}^{l'}(\Omega, \phi) \Omega d\Omega d\phi = \delta_{ss'} \delta_{ll'}$$

Espace	Base	Domaine	Pondération
Objet	$B_s^l = Z_{ l +2s}^{(l)}(\rho) \exp[jl\theta]$	$0 \leq \rho \leq 1$ $0 \leq \theta < 2\pi$	r
Fourier	$F_s^l = J_{ l +2s+1}(\Omega) \exp[jl\phi]$	$0 \leq \Omega < \infty$ $0 \leq \phi < 2\pi$	Ω^{-1}
Radon	$R_s^l = U_{ l +2s}(r) \exp[jl\phi]$	$-1 \leq r \leq 1$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$	$\sqrt{1 - r^2}^{\frac{1}{2}}$

Objet

$$\left\langle B_s^l(\rho, \theta), B_{s'}^{l'}(\rho, \theta) \right\rangle_\rho = \int_0^{2\pi} \int_0^1 B_s^l B_{s'}^{l'} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{|l| + 2s + 1} \delta_{ss'} \delta_{ll'}$$

Fourier

$$\left\langle F_s^l(\Omega, \phi), F_{s'}^{l'}(\Omega, \phi) \right\rangle_{\Omega^{-1}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F_s^l F_{s'}^{l'} \Omega^{-1} d\Omega d\phi = \frac{\pi}{|l| + 2s + 1} \delta_{ss'} \delta_{ll'}$$

Radon

$$\left\langle R_s^l(r, \phi), R_{s'}^{l'}(r, \phi) \right\rangle_{(1-r^2)^{1/2}} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 R_s^l R_{s'}^{l'} (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr d\phi = \pi^2 \delta_{ss'} \delta_{ll'}$$

Annexe C

Coordonnées cartésiennes et hypersphériques dans un espace de dimension n

Définissons les liens qui existent entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées hypersphériques dans un espace de dimension n :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi)$$

$$x_1 = \rho \cos \theta_1$$

$$x_2 = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

$$\vdots =$$

$$x_{n-2} = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}$$

$$x_{n-1} = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \phi$$

$$x_n = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \phi$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

– Élément de volume :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= dx_1 \cdots dx_n \\ &= \rho^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\phi \end{aligned}$$

– Élément de surface sur le sphère unitaire :

$$d\omega = (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\phi$$

– Vecteur unitaire perpendiculaire à la surface sur le sphère unitaire :

$$\boldsymbol{\xi} = \left[(\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\phi \right]$$

Exemple 1: $n = 2$

$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \phi), \quad x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, \quad \rho \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi$$

– Élément de surface :

$$d\mathbf{x} = dx dy = \rho d\rho d\phi$$

– Élément de contour sur le cercle unitaire :

$$d\boldsymbol{\omega} = d\phi$$

– Vecteur unitaire perpendiculaire au contour sur le cercle unitaire :

$$\boldsymbol{\xi} = [\cos \phi, \sin \phi]$$

$$d\boldsymbol{\xi} = d\phi$$

Exemple 2: $n = 3$

$$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \theta, \phi)$$

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \sin \theta \cos \phi$$

– Élément de volume :

$$d\mathbf{x} = dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$$

– Élément de surface sur le sphère unitaire :

$$d\boldsymbol{\omega} = \sin \theta d\theta d\phi$$

– Vecteur unitaire perpendiculaire à la surface sur le sphère unitaire :

$$\boldsymbol{\xi} = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$$

$$d\boldsymbol{\xi} = \sin \theta d\theta d\phi$$

Table des figures

1.1	Tomographie à rayons X	10
1.2	Notations utilisées pour la définition de la projection $p(r,\phi)$ d'une fonction $f(x,y)$	11
1.3	Théorème de Projection : Relation entre la TF 1-D de la pro- jection $p(r,\phi)$ et la TF 2-D de $f(x,y)$	12
1.4	Relation entre la TR et TF	12
2.1	Notations utilisées pour la définition de la transformée de Radon en 2-D	14
2.2	Notations utilisées pour la définition de la transformée de Radon en 3-D	15
4.1	Relation entre une fonction, sa transformée de Radon R, et sa transformée de Fourier F en dimension n	34
4.2	Relation entre une fonction, sa transformée de Radon R, et sa transformée de Fourier F en dimension 2.	35
5.1	Transformée de Radon (TR): Inversion dans le domaine de Fourier.	47
5.2	Transformée de Radon (TR): Inversion par rétroprojection. . .	50
5.3	Inversion par rétroprojection et des projections filtrées.	51
5.4	Inversion par rétroprojection et filtrage par convolution 2-D. . .	52

Liste des tableaux